DS 6 – Corrigé

Exercice 1 – Dérivation

1. Recherchons un prolongement par continuité en 0.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ et que $\cos\dfrac{1}{x}$ est borné, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Par conséquent, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Étudions maintenant la dérivabilité de la fonction prolongée.
• Sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}$$

• En 0, on calcule la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2\cos\frac{1}{h} = 0$$

Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

2. Notons $u : x \mapsto x^2 + x$ et $v : x \mapsto e^x$, et écrivons la formule de Leibniz :

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

Or on a $u : x \mapsto x^2 + x$, $u' : x \mapsto 2x+1$, $u'' : x \mapsto 2$ et $u^{(k)}$ est la fonction nulle dès que $k \geqslant 3$.
De plus, $v^{(n-k)} = v$.
Il n'y a donc que trois termes non nuls dans la somme (ceux pour $k = 0,1,2$) et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(x^2+x)e^x + \binom{n}{1}(2x+1)e^x + \binom{n}{2}2e^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = (x^2 + (2n+1)x + n^2)e^x}$$

Exercice 2

1. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$A(s)A(t) = \left(\mathrm{Id}_E + tu + \frac{t^2}{2}u^2\right)\left(\mathrm{Id}_E + su + \frac{s^2}{2}u^2\right)$$

$$= \mathrm{Id}_E + su + \frac{s^2}{2}u^2 + tu + tsu + \frac{ts^2}{2}\underbrace{u^3}_{=0} + \frac{t^2}{2}u^2 + \frac{t^2s}{2}\underbrace{u^3}_{=0} + \frac{t^2s^2}{4}\underbrace{u^4}_{=0}$$

$$= \mathrm{Id}_E + (s+t)u + \frac{s^2+2st+t^2}{2}u^2 = \mathrm{Id}_E + (s+t)u + \frac{(s+t)^2}{2}u^2$$

On trouve bien $\boxed{A(s+t) = A(s)A(t).}$

2. Montrons la propriété par récurrence.
• Pour $n = 0$, on a bien $A(0) = \mathrm{Id}_E = A(t)^0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $A(nt) = A(t)^n$.
Alors $A((n+1)t) = A(nt+t) = A(nt)A(t) = A(t)^nA(t) = A(t)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, A(nt) = (A(t))^n.}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que $A(t)A(-t) = A(-t)A(t) = A(0) = \mathrm{Id}_E$.
Donc $A(t) \in \mathrm{GL}(E)$ avec $\boxed{A(t)^{-1} = A(-t).}$

4. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \,\mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2 = 0$.
En composant par u^2 il vient, puisque $u^3 = 0$: $\alpha u^2 = 0$, d'où l'on déduit $\alpha = 0$.
En repartant de $\beta u + \gamma u^2 = 0$ et en composant par u, il vient $\beta u^2 = 0$, d'où $\beta = 0$.
Il ne reste plus que $\gamma u^2 = 0$, d'où l'on obtient $\gamma = 0$.
On a démontré que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on en déduit que $\boxed{(\mathrm{Id}_E, u, u^2) \text{ est libre.}}$

5. *Remarque : L'application A n'est pas une application linéaire, et on ne peut pas utiliser le noyau...*
Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $A(s) = A(t)$.
On a $\mathrm{Id}_E + su + \dfrac{s^2}{2}u^2 = \mathrm{Id}_E + tu + \dfrac{t^2}{2}u^2$.
Par liberté de la famille (Id_E, u, u^2), on obtient $\left\{\begin{array}{ccc} 1 & = & 1 \\ s & = & t \\ s^2/2 & = & t^2/2 \end{array}\right.$, d'où le résultat : $s = t$.
On a bien $\boxed{A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E), t \mapsto A(t) \text{ injective.}}$

Exercice 3 – Un espace de dimension $3n$

1. D'après le théorème du rang appliqué à f, on a $\underbrace{\mathrm{rg}\, f}_{=2n} = \underbrace{\dim E}_{=3n} - \dim \ker f$.
On en déduit $\boxed{\dim \ker f = n.}$

2. $\boxed{\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f^2\,?}$ Soit $x \in \mathrm{Im}\, g$. Alors il existe $y \in \mathrm{Im}\, f$ tel que $x = g(y) = f(y)$. Comme $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe aussi $z \in E$ tel que $y = f(z)$. On a donc $x = f^2(z)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, f^2$.
$\boxed{\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, g\,?}$ Soit $x \in \mathrm{Im}\, f^2$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^2(y)$. Mais alors on a $f(y) \in \mathrm{Im}\, f$ et $x = g(f(y))$, ce qui montre $x \in \mathrm{Im}\, g$.
$\boxed{\ker g \subset \ker f \cap \mathrm{Im}\, f\,?}$ Soit $x \in \ker g$. Alors x est dans l'ensemble de départ de g, donc $x \in \mathrm{Im}\, f$. De plus, $g(x) = 0$, donc $f(x) = 0$, donc $x \in \ker f$.
$\boxed{\ker f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \ker g\,?}$ Soit $x \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$. Alors x est dans l'ensemble de départ de g, on peut calculer son image par g et on a $g(x) = f(x) = 0$. Donc $x \in \ker g$.
Finalement on a bien $\boxed{\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, f^2 \text{ et } \ker g = \ker f \cap \mathrm{Im}\, f.}$

3. En appliquant le théorème du rang à g, on obtient $\mathrm{rg}\, g = \dim E - \dim \ker g$.
De plus, $\mathrm{rg}\, g = \dim \mathrm{Im}\, g = \dim \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{rg}\, f^2$.
Enfin, $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim \ker g \leqslant \dim \ker f$.
On en déduit $\mathrm{rg}\, f^2 \geqslant \dim E - \dim \ker f$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}\, f^2 \geqslant n.}$

4. Soit $x \in \mathrm{Im}\, f^2$. Alors il existe $y \in E$ avec $x = f^2(y)$. On a alors $f(x) = f^3(y) = 0$, donc $x \in \ker f$.
On a démontré que $\boxed{\mathrm{Im}\, f^2 \subset \ker f}$, et on en déduit $\dim \mathrm{Im}\, f^2 \leqslant \dim \ker f$, soit $\mathrm{rg}\, f^2 \leqslant n$.
Comme on a déjà obtenu $\mathrm{rg}\, f^2 \geqslant n$, on aboutit à $\boxed{\mathrm{rg}\, f^2 = n.}$

5. Par le théorème du rang, $\underbrace{\mathrm{rg}\, f^2}_{=n} = \underbrace{\dim E}_{=3n} - \dim \ker f^2$. Donc $\dim \ker f^2 = 2n$.
Comme S est un supplémentaire de $\ker f^2$, sa dimension vaut $\dim E - \dim \ker f^2$. Donc $\boxed{\dim S = n.}$

6. La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_n, f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n), f^2(e_1), f^2(e_2), \ldots, f^2(e_n))$ contient $3n$ vecteurs. Comme $\dim E = 3n$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour en déduire qu'elle est une base. Montrons donc sa liberté.

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n,\gamma_1,\dots,\gamma_n$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i f(e_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i f^2(e_i) = 0_E$$

Remarquons que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i f(e_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i f^2(e_i) \in \ker f^2$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in S$.

Comme S et $\ker f^2$ sont en somme directe, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i f(e_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i f^2(e_i) = 0_E$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0_E$.
De la dernière égalité et du fait que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, on en déduit que les α_i sont tous nuls.
En appliquant f à la première égalité, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i f^2(e_i) = 0_E$, ou encore $f^2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) = 0_E$.
Par conséquent, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \in \ker f^2$. mais on a aussi $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i e_i \in S$. Comme $\ker f^2 \cap S = \{0_E\}$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i e_i = 0$ puis, par liberté de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, que les β_i sont tous nuls.

Il ne reste plus que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \gamma_i f^2(e_i) = 0_E$, ce qui nous permet d'écrire $f^2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i\right) = 0_E$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i \in \ker f^2 \cap S$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i = 0_E$, et on conclut que les γ_i sont tous nuls par liberté de la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Finalement, on a bien démontré que $\mathcal{F}$ est libre, et on en déduit que $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base.}}$

Exercice 4 – Crochet de Lie et projecteurs

1. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[p,f] = \lambda p$ ($\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$). Alors $p \circ f - f \circ p = \lambda p$.
En composant à gauche et à droite par p, on obtient $p^2 \circ f \circ p - p \circ f \circ p^2 = \lambda p^3$. Comme $p^2 = p$, il vient $0 = \lambda p$. Comme $\lambda \neq 0$, on a bien $\boxed{p = 0.}$

2. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $[p,f] = 0$, c'est-à-dire que $p \circ f = f \circ p$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p$ (donc $p(x) = x$). Alors $f(x) = f(p(x)) = p(f(x)) \in \operatorname{Im} p$.
Donc $\operatorname{Im} p$ est stable par f.
Soit $x \in \ker p$ (donc $p(x) = 0_E$). Alors $p(f(x)) = f(p(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \ker p$.
Donc $\ker p$ est stable par f.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ soient stables par f.
Soit $x \in \ker p$. Alors $[p,f](x) = p(\underbrace{f(x)}_{\in \ker p}) - f(p(x)) = 0_E$, donc $x \in \ker[p,f]$.
Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors $[p,f](x) = p(\underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} p}) - f(p(x)) = f(x) - f(x) = 0_E$, donc $x \in \ker[p,f]$.
On a donc $\ker[p,f] \supset \ker p$ et $\ker[p,f] \supset \operatorname{Im} p$, par conséquent $\ker[p,f] \supset \operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$ et $[p,f] = 0_E$.
Finalement, on a bien l'équivalence $\boxed{[p,f] = 0 \text{ ssi } \operatorname{Im} p \text{ et } \ker p \text{ sont stables par } f.}$

3. ***a)*** Procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
• Pour $k = 0$, on a $[f^0,g] = [\operatorname{Id}_E, g] = \operatorname{Id}_E \circ g - g \circ \operatorname{Id}_E = 0$, et $\lambda k f^k = 0$. L'égalité est bien vérifiée.

• Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $[f^k,g] = \lambda k f^k$. Alors on a :

$$[f^{k+1},g] = f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1}$$

On sait de plus que $[f,g] = \lambda f$, donc que $g \circ f = f \circ g - \lambda f$. Substituons :

$$[f^{k+1},g] = f^{k+1} \circ g - (f \circ g - \lambda f) \circ f^k$$

$$[f^{k+1},g] = f^{k+1} \circ g - f \circ g \circ f^k + \lambda f^{k+1}$$

$$[f^{k+1},g] = f \circ (\underbrace{f^k \circ g - g \circ f^k}_{=[f,g]}) + \lambda f^{k+1}$$

$$[f^{k+1},g] = f \circ (\lambda k f^k) + \lambda f^{k+1}$$

On aboutit bien à $[f^{k+1},g] = \lambda(k+1) f^{k+1}$.

Ce qui achève la récurrence et permet de conclure : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, [f^k,g] = \lambda k f^k.}$

b) Montrons la propriété par récurrence sur m.

• Pour $m = 0$, la famille (Id_E) ne contient qu'un seul élément et il est non nul, donc elle est libre.

• Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons que $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m)$ est libre.

Montrons que si $f^{m+1} \neq 0$, alors $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m, f^{m+1})$ est libre également.

Soient $\alpha_1, \alpha 2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ des scalaires tels que :

$$\sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k f^k = 0 \quad (A)$$

Remarquons que l'application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $u \mapsto [u,g]$ vérifie, pour tous $u,v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda u + v) = [\lambda u + v, g] = (\lambda u + v) \circ g - g \circ (\lambda u + v) = \lambda(u \circ g - g \circ u) + v \circ g - g \circ v = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$, elle est donc linéaire. Appliquons la à l'équation (A) :

$$\left[\sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k f^k, g\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k \left[f^k, g\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k \lambda k f^k = 0$$

On peut diviser par λ non nul et obtenir :

$$\sum_{k=0}^{m+1} k \alpha_k f^k = 0 \quad (B)$$

Pour éliminer le terme en f^{m+1}, écrivons la combinaison linéaire : $m+1$ fois (A) moins (B).

$$\sum_{k=0}^{m+1} ((m+1)\alpha_k - k\alpha_k) f^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m} (m+1-k)\alpha_k f^k = 0$$

En utilisant la liberté de la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m)$, on obtient $(m+1-k)\alpha_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$, donc $\alpha_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m$.

L'équation (A) se réduit alors à $\alpha_{m+1} f^{m+1} = 0$ et, comme $f^{m+1} \neq 0$, on trouve $\alpha_{m+1} = 0$.

Tous les α_k sont nuls et la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m, f^{m+1})$ est donc libre, ce qui conclut la récurrence.

c) On sait d'après le cours que $\boxed{\dim \mathcal{L}(E) = n^2.}$

Supposons que $f^{2n} \neq 0$. Alors, d'après la question précédente, la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{2n})$ est une famille libre à $2n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $2n$.

C'est absurde. Donc $f^{2n} = 0$ et $\boxed{f \text{ est nilpotent.}}$

4. ***a)*** Comme $[p,q]=0$, on a $p\circ q=q\circ p$.
Alors $s^2=p\circ q\circ p\circ q=p^2\circ q^2=p\circ q=s$.
Et $r^2=(p+q-p\circ q)\circ(p+q-p\circ q)$. On développe :
$r^2=\underbrace{p^2}_{=p}+p\circ q-\underbrace{p^2\circ q}_{=p\circ q}+\underbrace{q\circ p}_{=p\circ q}+\underbrace{q^2}_{=q}-\underbrace{q\circ p\circ q}_{=p\circ q}-\underbrace{p\circ q\circ p}_{=p\circ q}-\underbrace{p\circ q^2}_{=p\circ q}+\underbrace{p\circ q\circ p\circ q}_{=p\circ q}$
On simplifie : $r^2=p+q-p\circ q=r$.
Donc $\boxed{s,r\in\mathcal{P}_E.}$

b) $\boxed{\ker s\subset\ker p+\ker q\ ?}$ Soit $x\in\ker s$. Alors $s(x)=p(q(x))=0_E$.
Le vecteur x s'écrit $x=\underbrace{q(x)}_{\in\ker p}+\underbrace{x-q(x)}_{\in\ker q}$ donc $x\in\ker p+\ker q$.

$\boxed{\ker s\supset\ker p+\ker q\ ?}$ Soit $x\in\ker p+\ker q$. Alors il existe deux vecteurs u et v tels que $x=u+v$ et $p(u)=q(v)=0_E$.
On a alors $s(x)=s(u)+s(v)=q(p(u))+p(q(v))=0_E$ donc $x\in\ker s$.
$\boxed{\operatorname{Im}s\subset\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q\ ?}$ Soit $x\in\operatorname{Im}s$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=s(y)$. Mais alors $x=p(q(y))\in\operatorname{Im}p$ et $x=q(p(y))\in\operatorname{Im}q$.
$\boxed{\operatorname{Im}s\supset\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q\ ?}$ Soit $x\in\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q$. Comme p et q sont des projecteurs, on a $p(x)=x$ et $q(x)=x$. Donc $x=p(q(x))=s(x)$. Donc $x\in\operatorname{Im}s$.
Finalement, on a bien $\boxed{\ker s=\ker p+\ker q \text{ et } \operatorname{Im}s=\operatorname{Im}p\cap\operatorname{Im}q.}$

c) $\boxed{\ker r\subset\ker p\cap\ker q\ ?}$ Soit $x\in\ker r$. Alors $r(x)=p(x)+q(x)-p(q(x))=0_E$.
En composant par p on obtient $p(x)+p(q(x))-p(q(x))=p(x)=0_E$ donc $x\in\ker p$.
En composant par q on obtient $q(p(x))+q(x)-q(p(x))=q(x)=0_E$ donc $x\in\ker q$.
$\boxed{\ker r\supset\ker p\cap\ker q\ ?}$ Soit $x\in\ker p\cap\ker q$. Alors $r(x)=p(x)+q(x)-p(q(x))=0_E$.
$\boxed{\operatorname{Im}r\subset\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q\ ?}$ Soit $x\in\operatorname{Im}r$. Alors il existe $y\in E$ tel que $x=r(y)$.
Mais alors x s'écrit $x=\underbrace{p(y)-p(q(y))}_{\in\operatorname{Im}p}+\underbrace{q(y)}_{\in\operatorname{Im}q}$. Donc $x\in\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$.

$\boxed{\operatorname{Im}r\supset\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q\ ?}$ Soit $x\in\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q$. Alors x s'écrit $x=u+v$ avec $p(u)=u$ et $q(v)=v$.
On a $r(u)=p(u)+q(u)-q(p(u))=u+q(u)-q(u)=u$ et $r(v)=p(v)+q(v)-p(q(v))=p(v)+v-p(v)=v$. Donc $r(x)=r(u)+r(v)=u+v=x$, donc $x\in\operatorname{Im}r$.
Finalement, on a bien $\boxed{\ker r=\ker p\cap\ker q \text{ et } \operatorname{Im}r=\operatorname{Im}p+\operatorname{Im}q.}$

d) • Montrons que $\ll$ est réflexive.
Pour tout projecteur p, on a $p\circ p=p\circ p=p$, donc on a bien $p\ll p$.
• Montrons que $\ll$ est transitive.
Soient p,q,r trois projecteurs tels que $p\ll q$ et $q\ll r$.
Autrement dit, on a $p\circ q=q\circ p=p$ et $q\circ r=r\circ q=q$.
Alors on a d'une part $p\circ r=(p\circ q)\circ r=p\circ(q\circ r)=p\circ q=p$.
Et d'autre part $r\circ p=r\circ(q\circ p)=(r\circ q)\circ p=q\circ p=p$.
Donc $p\ll r$.
• Montrons que $\ll$ est antisymétrique.
Supposons que $p\ll q$ et $q\ll p$. Alors $p\circ q=q\circ p=p$ et $q\circ p=p\circ q=q$. Donc $p=q$.

On peut conclure : $\boxed{\ll \text{ est une relation d'ordre.}}$

e) Montrons d'abord que s est un minorant et r un majorant de la paire $\{p,q\}$.
• On a $p\circ s=s\circ p=p\circ p\circ q=p\circ q=s$, donc $s\ll p$. Par symétrie des rôles de p et q on a aussi $s\ll q$.

• On a $p \circ r = r \circ p = p^2 + p \circ q - p^2 \circ q = p$, donc $p \ll r$. Par symétrie des rôles de p et q on a aussi $q \ll r$.

Montrons ensuite que s est le plus grand des minorants, et r le plus petit des majorants.
• Soit $f \in \mathcal{P}_E$ tel que $f \ll p$ et $f \ll q$. Montrons que $f \ll s$.
On a $f \circ s = f \circ (p \circ q) = (f \circ p) \circ q = f \circ q = f$.
De même, $s \circ f = (p \circ q) \circ f = p \circ (q \circ f) = p \circ f = f$.
On a donc bien $f \ll s$. On peut conclure $\boxed{s = \inf\{p,q\}.}$
• Soit $f \in \mathcal{P}_E$ tel que $p \ll f$ et $q \ll f$. Montrons que $r \ll f$.
On a $f \circ r = f \circ (p + q - p \circ q) = f \circ p - f \circ q - f \circ p \circ q = p + q - p \circ q = r$.
De même, $r \circ f = (p + q - p \circ q) \circ f = p \circ f + q \circ f - p \circ q \circ f = p + q - p \circ q = r$.
On a donc bien $r \ll f$. On peut conclure $\boxed{r = \sup\{p,q\}.}$

5. ***a)*** On sait que $p \circ q - q \circ p = \lambda p + \mu q$.

Composons à gauche ou à droite par q : $\begin{cases} q \circ p \circ q - q \circ p = \lambda q \circ p + \mu q \\ p \circ q - q \circ p \circ q = \lambda p \circ q + \mu q \end{cases}$

Ajoutons les deux équations :

$$\underbrace{p \circ q - q \circ p}_{=[p,q]} = \lambda(\underbrace{p \circ q + q \circ p}_{=[p,q]+2q\circ p}) + 2\mu q$$

D'où $\lambda p + \mu q = \lambda(\lambda p + \mu q + 2q \circ p) + 2\mu q$, ou encore $\boxed{2\lambda q \circ p + \mu(1+\lambda)q = \lambda(1-\lambda)p.}$

b) Soit $x \in \operatorname{Im} p$. Alors $p(x) = x$ et on obtient, à l'aide du résultat de la question précédente :

$$2\lambda q(p(x)) + \mu(1+\lambda)q(x) = \lambda(1-\lambda)p(x) \quad \Rightarrow \quad 2\lambda q(x) + \mu(1+\lambda)q(x) = \lambda(1-\lambda)x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda(1-\lambda)}_{\neq 0} x \in \operatorname{Im} q \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{Im} q$$

Donc on a bien $\boxed{\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q.}$
Soit $x \in E$. Comme $p(x) \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$, on a $q(p(x)) = p(x)$. On a donc bien $\boxed{q \circ p = p.}$

c) Comme $p \circ q - q \circ p = \lambda p + \mu q$, on déduit du résultat précédent que $p \circ q = (\lambda+1)p + \mu q$.
En composant à droite par p, on a $p \circ q \circ p = (\lambda+1)p + \mu p$ et donc $p = (1+\lambda+\mu)p$.
Comme $p \neq 0$, on a donc $1 + \lambda + \mu = 1$ d'où $\underline{\mu = -\lambda}$.
Revenons alors à $p \circ q = (\lambda+1)p + \mu q$, soit $p \circ q = (\lambda+1)p - \lambda q$.
En composant par p à gauche, on a $p \circ q = (\lambda+1)p - \lambda p \circ q$, donc $(1+\lambda)p \circ q = (1+\lambda)p$.
Supposons que $\lambda \neq -1$. On aurait alors $p \circ q = p$, et de $p \circ q = (\lambda+1)p - \lambda q$ on déduit $p = q$, ce qui est contraire aux hypothèses de l'énoncé. Donc $\boxed{\lambda = -1.}$
Alors, de $\mu = -\lambda$, on déduit $\boxed{\mu = 1.}$
L'égalité $p \circ q = (\lambda+1)p + \mu q$ devient $p \circ q = q$, et il s'ensuit que $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$.
On peut donc conclure $\boxed{\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q.}$

d) Soient p et q sont deux projecteurs tels que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.
Remarquons que si $x \in E$, alors $p(x) \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$ donc $q(p(x)) = p(x)$, on en déduit que $q \circ p = p$.
En échangeant les rôles de p et q, on obtient de la même façon que $p \circ q = q$.
Comme $[p,q] = p \circ q - q \circ q$, on a bien $\boxed{[p,q] = q - p.}$

6. ***a)*** On part de l'équation de la question ***5a***, et on fait la substitution $q \circ p = p \circ q - \lambda p - \mu q$.
On obtient $2\lambda(p \circ q - \lambda p - \mu q) + \mu(1+\lambda)q = \lambda(1-\lambda)p$.
Après simplification : $\boxed{2\lambda p \circ q + \mu(1-\lambda)q = \lambda(1+\lambda)p.}$

b) Soit $x \in \ker q$ (donc $q(x) = 0_E$).
En appliquant le résultat précédent, on a $2\lambda p(q(x)) + \mu(1-\lambda)q(x) = \lambda(1+\lambda)p(x)$, donc $\lambda(1+\lambda)p(x) = 0_E$. Comme λ ne vaut ni 0 ni -1, on obtient $p(x) = 0_E$ et $x \in \ker p$.
D'où le résultat : $\boxed{\ker q \subset \ker p.}$

Soit $x \in E$. Alors $q(q(x) - x) = 0_E$, donc $q(x) - x \in \ker q$. Comme $\ker q \subset \ker p$, on a aussi $q(x) - x \in \ker p$, donc $p(q(x) - x) = 0_E$. Ce qui donne $p(q(x)) = p(x)$.
On a donc $\boxed{p \circ q = p.}$

L'égalité $[p,q] = \lambda p + \mu q$, ou $p \circ q - q \circ p = \lambda p + \mu q$, s'écrit alors $p - q \circ p = \lambda p + \mu q$. En composant par p à gauche, on obtient $p - p \circ q \circ p = \lambda p + \mu p \circ q$, ce qui donne $p - p = \lambda p + \mu p$ en réutilisant $p \circ q = p$. On obtient donc $(\lambda + \mu)p = 0$ et, comme $p \neq 0$, on a bien $\boxed{\lambda + \mu = 0.}$

Repartons de $p - q \circ p = \lambda p + \mu q = \lambda p - \lambda q$, c'est-à-dire $q \circ p = (1-\lambda)p + \lambda q$. Si l'on compose par p à droite, on obtient $q \circ p = (1-\lambda)p + \lambda q \circ p$, donc $(1-\lambda)q \circ p = (1-\lambda)p$. Si λ était différent de 1, on aurait alors $q \circ p = p$. De $p - q \circ p = \lambda p - \lambda q$ on aboutirait alors à $0 = \lambda p - \lambda q$ donc $p = q$, ce qui est absurde.
Donc $\boxed{\lambda = 1.}$

L'égalité $q \circ p = (1-\lambda)p + \lambda q$ se réécrit maintenant $q \circ p = q$. Alors, pour $x \in \ker p$, on a $q(x) = 0_E$. Donc $\boxed{\ker p \subset \ker q.}$

c) Soient p et q sont deux projecteurs tels que $\ker p = \ker q$.
Pour $x \in E$, on a $p(x) - x \in \ker p$ donc $p(x) - x \in \ker q$, donc $q(p(x)) = q(x)$. On en déduit que $q \circ p = q$. De même, en échangeant les rôles de p et q, on trouve $p \circ q = p$.
Alors, comme $[p,q] = p \circ q - q \circ p$, on obtient bien $\boxed{[p,q] = p - q.}$

Exercice 5 – Familles positivement génératrices

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{F}$ soit positivement génératrice. Alors par définition elle est génératrice et il existe $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$, ce qui montre l'implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathcal{F}$ soit génératrice.

Supposons de plus l'existence de $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k = 0 \quad (A)$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est positivement génératrice.

Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{F}$ est génératrice, x s'écrit $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \quad (B)$, où les λ_k sont des réels.

Posons $M = 1 + \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \dfrac{-\lambda_i}{\alpha_i}$ et écrivons la combinaison linéaire : M fois l'équation (A), plus l'équation (B). On obtient :

$$x = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + M\alpha_k) e_k$$

Dans cette équation, $\lambda_k + M\alpha_k > \lambda_k + \left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \dfrac{-\lambda_i}{\alpha_i}\right) \times \alpha_k \geqslant \lambda_k + \dfrac{-\lambda_k}{\alpha_k} \times \alpha_k = 0$, ce qui montre que x est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des (e_i) et donc que la famille $\mathcal{F}$ est positivement génératrice.

2. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice à p vecteurs dans un espace de dimension n, donc on a $p \geqslant n$.
Si p était égal à n, alors $\mathcal{F}$ serait une base, et en particulier serait libre. C'est absurde puisque le résultat de la question précédente montre qu'elle est liée. Donc $\boxed{p \geqslant n + 1.}$

3. ***a)*** Il s'agit du théorème de la base extraite : de la famille génératrice $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-famille $(e_i)_{i\in I}$ qui est une base (et qui a $\dim E = n$ éléments).

b) Le cardinal de J vaut $p-n$, or $p-n \geqslant n+1$. Donc la famille $(e_j)_{j\in J}$, qui a strictement plus de n éléments dans un espace de dimension n, est liée.

c) La famille $(e_j)_{j\in J}$ est liée, on peut donc écrire une relation

$$\sum_{j\in J} \alpha_j e_j = 0$$

où les α_j sont des réels quelconques.

D'autre part, $\mathcal{F}$ est positivement génératrice donc, d'après la première question, ses vecteurs vérifient une relation linéaire à coefficients strictement positifs qu'on peut écrire, en séparant les termes d'indices $i \in I$ et ceux d'indice $j \in J$:

$$\sum_{i\in I} \beta_i e_i + \sum_{j\in J} \gamma_j e_j = 0$$

où les β_i, γ_j sont des réels strictement positifs.

Prenons un réel λ (qu'on précisera plus loin) et écrivons une combinaison linéaire de ces deux équations :

$$\sum_{i\in I} \beta_i e_i + \sum_{j\in J} (\lambda\alpha_j + \gamma_j) e_j = 0$$

En choisissant $\lambda = \max\limits_{j\in J} \dfrac{-\gamma_j}{\alpha_j}$, tous les coefficients $\lambda\alpha_j + \gamma_j$ sont positifs ou nuls, et au moins l'un d'entre eux est nul.

Notons alors $K = \{j \in J \mid \lambda\alpha_j + \gamma_j \neq 0\}$. Alors K est bien une partie stricte de J.

De plus, $(e_i)_{i\in I\cup K}$ est une surfamille de la base $(e_i)_{i\in I}$, donc est génératrice.

Enfin, $(e_i)_{i\in I\cup K}$ est liée par la relation $\displaystyle\sum_{i\in I} \beta_i e_i + \sum_{j\in K} (\lambda\alpha_j + \gamma_j) e_j = 0$, à coefficients strictement positifs.

D'après la question ***1***, $(e_i)_{i\in I\cup K}$ est une famille positivement génératrice.

4. On procède par récurrence forte sur le nombre p de vecteur d'une famille positivement génératrice :

• Pour $p = 2n+1$: De toute famille positivement génératrice à p vecteurs on peut extraire une sous famille positivement génératrice avec au plus $2n$ vecteurs : c'est le résultat de la question précédente.

• Soit $p > 2n+1$, supposons que de toute famille positivement génératrice à q vecteurs (avec $q < p$) on puisse extraire une sous famille positivement génératrice avec au plus $2n$ vecteurs.

Soit $\mathcal{F}$ une famille positivement génératrice à p vecteurs. D'après la question précédente, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille positivement génératrice à $q < p$ vecteurs et, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut à nouveau en extraire une famille positivement génératrice avec au plus $2n$ vecteurs.

Ce qui démontre le résultat.

5. Soit $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E, et $\mathcal{F} = (e_1,e_2,\ldots,e_n,-e_1,-e_2,\ldots,-e_n)$.

Montrons que la famille $\mathcal{F}$ répond à la question.

Elle contient $2n$ vecteurs. Étant génératrice et vérifiant la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n} -e_k = 0$, elle est positivement génératrice.

Si on enlève un vecteur à $\mathcal{F}$, par exemple e_1, alors e_1 n'est plus positivement engendré par la famille résultante.