DM 14 – Corrigé

Partie A – Polynômes de Tchebychev

1. $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

2. Montrons par récurrence sur m que T_m est un polynôme de degré m , de coefficient dominant 2^{m-1} si $m \geqslant 1$ et vérifiant de plus $T_m(-X) = (-1)^m T_m(X)$ (ce qui entraine que T_m a la parité de m). C'est vérifié pour $m = 1$ et $m = 2$. Supposons la propriété vraie pour $m - 1$ et m. De $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$ on déduit, puisque $\deg(T_{m-1}) = m - 1 < m + 1 = \deg(XT_m)$, que T_{m+1} est de degré $m + 1$ et que son coefficient dominant est 2^m. De plus, $T_{m+1}(-X) = -2XT_m(-X) - T_{m-1}(-X) = (-1)^{m+1}T_{m+1}(X)$. La propriété est vraie au rang $m + 1$, elle est donc vraie pour tout m.

3. Base échelonnée en degrés.

4. On montre par récurrence sur n que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$. C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et n. De $\cos(nx + x) + \cos(nx - x) = 2\cos(nx)\cos(x)$ on déduit $\cos(nx + x) = 2\cos(x)T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$ d'où $\cos(nx + x) = T_{n+1}(\cos x)$. La propriété est vraie pour $n + 1$, elle est donc vraie pour tout n. La propriété $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$ se démontre de la même façon en remplaçant cos par ch.

5. Si $|u| \leqslant 1$ il existe x tel que $u = \cos(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\cos x)| = |\cos(nx)| \leqslant 1$.

6. Si $u > 1$ il existe $x > 0$ tel que $u = \operatorname{ch}(x)$ donc $|T_n(u)| = |T_n(\operatorname{ch}(x))| = \operatorname{ch}(nx) > 1$ puisque $nx > 0$.

7. $T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2n}\pi$ avec $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ pour que $x \in [0,\pi]$. Donc les $\cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ sont des racines de T_n dans $[-1; 1]$ et sont distincts.

8. T_n est de degré n donc n'a pas d'autre racine que les n trouvées à la question précédente. On en déduit aussi que ces n racines sont simples et que T_n est scindé.

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(x_k\right)\right).$$

Partie B – Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

1. L'application qui à (P,Q) associe $< P,Q >= \displaystyle\int_0^\pi P(\cos x)Q(\cos x)\,\mathrm{d}x$ est immédiatement une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive car $< P,P >= \displaystyle\int_0^\pi (P(\cos x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Elle est définie puisque $< P,P >= \displaystyle\int_0^\pi (P(\cos x))^2\,\mathrm{d}x = 0$ entraine par continuité de P et cos que $P(\cos x) = 0$ sur $[0,\pi]$; P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

2. On peut écrire puisque $p \neq q$ et $p \neq -q$:

$$< T_p,T_q >= \int_0^\pi T_p(\cos x)T_q(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)x) + \cos((p-q)x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^\pi = 0$$

3. T_n est orthogonal à tous les polynômes T_k pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ qui forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il est donc orthogonal à ce sous-espace.

4. $< T_0,T_0 >= \pi$ et pour $n \geqslant 1$:

$$< T_n,T_n >= \int_0^\pi (\cos(nx))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nx) + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

5. Pour $n \geqslant 1$, $T_n = 2^{n-1}X^n + Q$ avec $\deg(Q) \leqslant n-1$; Q est donc orthogonal à T_n et par suite $< T_n,T_n >=< T_n,2^{n-1}X^n >$ d'où $< T_n,X^n >= \dfrac{1}{2^{n-1}} < T_n,T_n >= \dfrac{\pi}{2^n}$. C'est vrai aussi pour $n = 0$ car $< T_0,1 >= \pi$.

6. La base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale puisque $< T_p,T_q >= 0$ si $p \neq q$.

Une base orthonormale peut être obtenue en normant les T_n : on pose $U_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}T_0$ et $U_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_n$ pour $n \geqslant 1$, la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une BON de $\mathbb{R}[X]$.

7. On obtient $(U_0,\dots,U_n)$.

Partie C – Calcul exact d'une intégrale

1. $c_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(e^{ij\frac{\pi}{n}})^k = e^{ij\frac{\pi}{n}}\frac{1-e^{ij\pi}}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} = e^{ij\frac{\pi}{n}}\frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}}$ puisque $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

3. c_j est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ijx_k} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=1}^{n} e^{ijk\frac{\pi}{n}} = e^{ij\frac{\pi}{2n}}\frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-(-1)^j}{e^{-ij\frac{\pi}{2n}}-e^{ij\frac{\pi}{2n}}} = \frac{1-(-1)^j}{-2i\sin\frac{j\pi}{2n}}$ qui est imaginaire pur, donc $c_j = 0$.

4. $I(T_p) =< T_p,T_0 >= \pi$ si $p = 0$ et 0 si $p > 0$.

$S_n(T_p) = \displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} T_p(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(px_k) = \frac{\pi}{n}c_p$ d'où $S_n(T_p) = \pi$ si $p = 0$ et 0 si $0 < p \leqslant n-1$.

On a donc pour tout $p \in \{0,..,n-1\}$, $I(T_p) = S_n(T_p)$.

5. I et S_n sont clairement des formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; comme elles coïncident sur la base $(T_0,T_1,...,T_{n-1})$, elles sont égales.

6. Si $Q \neq 0$, $\deg(QT_n) \geqslant n$ alors que $\deg(R) \leqslant n-1$; par suite, $\deg(QT_n) = \deg(P) \leqslant 2n-1$ donc $\deg(Q) \leqslant n-1$.

7. $I(P) = I(QT_n) + I(R) =< Q,T_n > +I(R) = 0 + I(R) = I(R)$ car T_n est orthogonal à Q.

8. $I(T_{2n}) =< T_{2n},T_0 >= 0$ car $n \geqslant 1$.

$S_n(T_{2n}) = \displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} T_{2n}(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1) = -\pi$.

On en déduit que $I(P) = S_n(P)$ n'est pas vérifié pour un polynôme de degré $2n$.

Partie D – Une méthode de quadrature pour le calcul d'une intégrale

1. On reconnaît une somme de Riemann.

On considère $a = 0$, $b = \pi$ et la fonction $f \circ \cos$ qui est continue sur $[0,\pi]$.

Avec $p = n$ et $c_k = \frac{2k+1}{2n}\pi \in [\frac{k}{n}\pi,\frac{k+1}{n}\pi]$ on obtient par le théorème des sommes de Riemann : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = \int_0^{\pi} f(\cos t)\,\mathrm{d}t = I(f)$.

2. $f(t) = \ln((a-t)^2 + 1 - t^2)$ avec $(a-t)^2 \geqslant 0$ et $1 - t^2 > 0$ pour $t \in]-1,1[$; pour $t = 1$, $(a-1)^2 > 0$ et pour $t = -1$, $(a+1)^2 > 0$. f est donc définie sur $[-1,1]$ et continue par continuité de ln.

3. $z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z = e^{(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = z_k$ avec $1 \leqslant k \leqslant 2n$. Puisque $\bar{z}_k = e^{-(2k-1)i\frac{\pi}{2n}} = e^{((4n-2k+1)i\frac{\pi}{2n}} = z_{2n-k+1}$ on déduit $\bar{z}_1 = z_{2n}$, ..., $\bar{z}_n = z_{n+1}$ donc les racines $(2n)^{\text{èmes}}$ de -1 sont : e^{ix_1}, e^{ix_2}, ..., e^{ix_n}, e^{-ix_1}, e^{-ix_2}, ..., e^{-ix_n}.

4. $X^{2n} + 1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\Big((X - e^{ix_k})(X - e^{-ix_k})\Big)$.

5. $(X-e^{ix_k})(X-e^{-ix_k}) = X^2-2\cos(x_k)X+1$ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{R}[X]$ car ses racines e^{ix_k} et e^{-ix_k} ne sont pas réelles puisque $x_k \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient bien la factorisation proposée.

6. $S_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a^2-2a\cos(x_k)+1) = \dfrac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}(a^2-2a\cos(x_k)+1) = \dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)$.

7. Si $a \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} a^{2n} = 0$ d'où $I(f) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = 0$.

Si $a > 1$, $S_n(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n}(1+\frac{1}{a^{2n}})) = 2\pi\ln a + \dfrac{\pi}{n}\ln(1+\frac{1}{a^{2n}})$. On en déduit $I(f) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n(f) = 2\pi\ln a$.

8. Si $a \in]0,1[$, $S_n(f) - I(f) = S_n(f) \sim \dfrac{\pi}{n}a^{2n}$ puisque $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0.

Si $a > 1$, $S_n(f) - I(f) = \dfrac{\pi}{n}\ln(1+\frac{1}{a^{2n}}) \sim \dfrac{\pi}{na^{2n}}$.