# DS 5 – Éléments de correction

## Exercice 1 – Divers

***1.*** ***a)*** On utilise la quantité conjuguée :

$$\frac{2-\sqrt{x+1}}{x-3} = \frac{\overbrace{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}^{=3-x}}{(x-3)(2+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2+\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to 3]{} \boxed{-\frac{1}{4}}$$

***b)*** Notons $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x}$ et cherchons un équivalent de $\ln(f(x))$ :

$$\ln(f(x)) = x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)$$

On factorise $x$ dans $\ln(1+x)$ pour obtenir $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ :

$$\begin{aligned}
\ln(f(x)) &= x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} && \text{en utilisant } \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \to 0 \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)\frac{1/x}{\ln(x)} && \text{en utilisant } 1/x \to 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $f(x)$ tend vers $e$ quand $x \to +\infty$ :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln x} = e}$$

***c)*** • Première méthode : on utilise la négligeabilité.

On sait que $1-\cos(ax) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}(ax)^2$, donc on a $\cos(ax) = 1 - \dfrac{a^2}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

On peut de même écrire $\cos(bx) = 1 - \dfrac{b^2}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2} &= \frac{\left(1-\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{b^2}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2} \\
&= \frac{\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)x^2+o(x^2)}{x^2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}+o(1) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{b^2-a^2}{2}}
\end{aligned}$$

• Deuxième méthode : On se sert du formulaire de trigonométrie, plus spécifiquement de la formule $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$. On conclut avec des équivalents.

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2} &= \frac{-2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^2} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2\frac{a+b}{2}x\frac{a-b}{2}x}{x^2} \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{b^2-a^2}{2}}
\end{aligned}$$

***2.*** ***a)*** Comme $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, alors $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x\ln x.}$

***b)*** On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\cos x}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \frac{\ln(1+\overbrace{(\cos x-1)}^{\to 0})}{(1+x)^{1/3}-1} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1-\cos x}{1/3\times x} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1/2\times x^2}{1/3\times x} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{3}{2}x}
\end{aligned}$$

***c)*** On sait que $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$, donc on a $1-\dfrac{1}{x} < \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$ pour $x>0$.

En utilisant le théorème d'encadrement, on en déduit que $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x}$$

***d)*** Comme ln tend vers 0 en 1, on a $1-\cos\ln x \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

De plus, quand $x\to 1$, on a $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$ et on obtient :

$$1-\cos\ln x \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}(x-1)^2$$

***3.*** La quantité $\dfrac{x-1}{\ln x}$ est définie lorsque $x>0$ et $\ln x\neq 0$. L'ensemble de définition de $f$ est donc

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[}$$

On recherche des prolongements par continuité éventuels en 0 et en 1.

- <u>En 0</u> : Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\ln x} = 0$, on peut prolonger $f$ par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=0.}$
- <u>En 1</u> : Par changement de variable $y=x-1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$.

Par conséquent, on peut prolonger $f$ par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1)=1.}$

*Remarque :* La fonction $f$ étant continue sur $]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$ par théorèmes généraux, on obtient après ce double prolongement une fonction définie et continue sur $[0;+\infty[$.

*4.* Notons $M = f(0)$. Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe un réel $A$, que l'on peut supposer positif, tel que $f(x) \geqslant M$ pour $x \geqslant A$. Comme $f$ est paire, on a aussi $f(x) \geqslant M$ pour $x \leqslant -A$.
Mais alors :
• Sur l'intervalle $[-A; A]$, la fonction continue $f$ est minorée et atteint un minimum en un point $x_0 \in [-A; A]$, d'après le théorème des bornes.
De plus, comme $0 \in [-A; A]$, on a $A = f(0) \geqslant f(x_0)$.
• Sur les intervalles $]-\infty; -A]$ et $[A; +\infty[$, on a $f(x) \geqslant A$ et donc $f(x) \geqslant f(x_0)$.
Donc $f$ atteint en fait en $x_0$ un minimum global :

$$\boxed{f \text{ est minorée sur } \mathbb{R} \text{ et atteint un minimum.}}$$

## Exercice 2 – Étude d'une suite

*1.* On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n \geqslant 0$.
• La propriété est vraie pour $n = 0$ par définition de la suite.
• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $v_n \geqslant 0$, alors $v_{n+1} = \sqrt[3]{v_n + \frac{1}{2^n}} \geqslant 0$. Ce qui achève la récurrence et démontre le résultat.

*2.* La fonction polynomiale $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec $f_n'(x) = 3x^2 - 1$ pour tout $x \geqslant 0$.
Son tableau de variations s'écrit :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}/3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2^n}$ | $\searrow$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{2^n}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*3.* • Sur l'intervalle $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, la fonction $f_n$ est strictement négative et l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution.
• Sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$, la fonction continue $f_n$ s'annule en au moins un point d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme de plus $f_n$ est strictement croissante sur cet intervalle, la solution de $f_n(x) = 0$ est unique.

*4.* Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = \left(x^3 - x - \frac{1}{2^n}\right) - \left(x^3 - x - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \boxed{< 0}$$

*5.* Soit $n \in \mathbb{N}$, appliquons le résultat précédent à $x = \alpha_{n+1}$.
On obtient $f_n(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_{n+1}) < 0$.
Comme $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, il vient $f_n(\alpha_{n+1}) < 0$.
Comme $\alpha_{n+1}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$, et comme $f_n$ est croissante sur cet intervalle et s'annule en $\alpha_n$, on obtient $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.
Finalement on a bien : $\boxed{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

***6.*** On va procéder par récurrence sur $n \geqslant 2$.

• Montrons d'abord que $v_2 \geqslant \alpha_2$. Il suffit de montrer que $f_2(v_2) \geqslant 0$.
On a d'abord $v_1 = \sqrt[3]{v_0 + \dfrac{1}{2^0}} = 1$, puis $v_2 = \sqrt[3]{v_1 + \dfrac{1}{2^1}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.
Mais alors $f_2(v_2) = \left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\right)^3 - \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{5}{4} - \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{5 - \sqrt[3]{96}}{4} \geqslant 0$ puisque $96 \leqslant 5^3$.
On a donc bien $v_2 \geqslant \alpha_2$.

• Soit $n \geqslant 2$ un entier.
Supposons que $v_n \geqslant \alpha_n$, ce qui est équivalent à $f_n(v_n) \geqslant 0$, c'est-à-dire $v_n^3 - v_n - \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$.
Montrons que $v_{n+1} \geqslant \alpha_{n+1}$.
On part de $v_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant v_n^3$.
On applique une racine cubique : $\sqrt[3]{v_n + \dfrac{1}{2^n}} \leqslant v_n \leqslant v_n + \underbrace{\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}}_{\geqslant 0}$.

Ce qui donne $v_{n+1} \leqslant v_{n+1}^3 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
Donc $f_{n+1}(v_{n+1}) \geqslant 0$, d'où l'on déduit $v_{n+1} \geqslant \alpha_{n+1}$.
On a démontré l'hérédité et achevé la démonstration par récurrence.

$$\boxed{v_n \geqslant \alpha_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 2.}$$

***7.*** Soit $n \geqslant 2$ un entier, alors $v_n \geqslant \alpha_n$.
On en déduit que $f_n(v_n) \geqslant 0$, autrement dit que $v_n^3 - v_n - \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$.
Mais $v_n^3 = v_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Il vient donc $v_{n-1} + \dfrac{1}{2^{n-1}} - v_n - \dfrac{1}{2^n} \geqslant 0$, d'où $v_{n-1} \geqslant v_n + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}} \geqslant v_n$.
On a bien montré que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante à partir d'un certain rang.}}$

***8.*** La suite $(v_n)$ est décroissante et positive, donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$ d'après le théorème de convergence monotone.
Comme $v_{n+1} = \sqrt[3]{v_n + \dfrac{1}{2^n}}$ pour tout $n$, on obtient par passage à la limite : $\ell = \sqrt[3]{\ell}$.
Les solutions de cette équation sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$.
Mais $v_n \geqslant \alpha_n \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ à partir d'un certain rang, donc $(v_n)$ ne peut pas tendre vers 0. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

## Problème – Fonction de Takagi

### Étude des fonctions $g$ et $g_n$.

***1.*** Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+1) = \left|x + 1 - \left\lfloor x + 1 + \dfrac{1}{2}\right\rfloor\right| = \left|x + 1 - \left\lfloor x + \dfrac{1}{2}\right\rfloor - 1\right| = g(x)$, donc $\boxed{g \text{ est 1-périodique.}}$
Si $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right[$, alors $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2}\right\rfloor = 0$ d'où $g(x) = x$.

Si $x \in \left]\dfrac{1}{2};1\right]$, alors $\left\lfloor x+\dfrac{1}{2}\right\rfloor = 0$ d'où $g(x) = 1-x$.

On en déduit que $g(x) = g(1-x)$ pour tous les $x \in [0;1]$. Cette égalité se généralise ensuite à tous les réels $x$ par 1-périodicité : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(1-x) = g(x)}$

***2.*** • Sur les intervalles $]k - 1/2; k + 1/2[$ , avec $k \in \mathbb{Z}$ :

$g$ est continue sur ces intervalles comme composée, différence et somme de fonctions continues.

• En les points $k + 1/2$, avec $k \in \mathbb{Z}$ :

On a $g(k + 1/2) = 1/2$.

De plus, $\lim\limits_{x\to k+1/2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to k+1/2^-} |x-k| = 1/2$

et $\lim\limits_{x\to k+1/2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to k+1/2^+} |x-k-1| = 1/2$,

donc $g$ est continue en $k + 1/2$.

Finalement, $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

***3.*** Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $g$ est affine de pente 1 ou $-1$ sur $[k; k+1/2]$ et $[k+1/2; k+1]$, donc elle est 1-lipschitzienne sur chacun de ces intervalles.

Mais si $g$ est 1-lipschitzienne sur deux intervalles $[a;b]$ et $[b;c]$, alors elle est 1-lipschitzienne sur leur réunion $[a;c]$ : pour $x$, $y \in [a;c]$, on aura lorsque $a \leqslant x \leqslant b \leqslant y \leqslant c$

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |g(x) - g(b)| + |g(b) - g(y)| \leqslant (b-x) + (y-b) = |y-x|$$

et $g$ est bien 1-lipschitzienne sur son ensemble de définition.

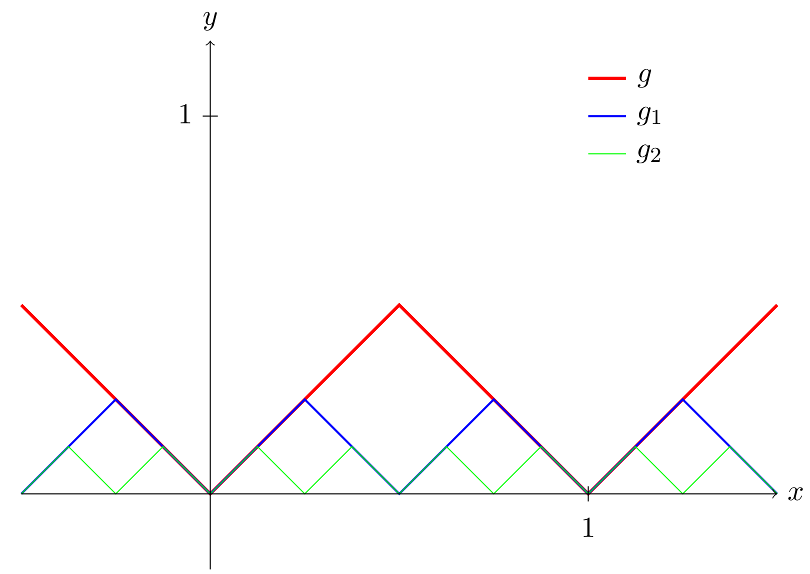
***4.*** Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $x$ est encadré par deux entiers : $k \leqslant x < k+1$.

Si $x \in [k; k+1/2]$, alors l'entier le plus proche de $x$ est $k$, et on a aussi $\lfloor x + 1/2 \rfloor = k$.

Si $x \in \,]k+1/2; k+1]$, alors l'entier le plus proche de $x$ est $k+1$, et on a aussi $\lfloor x+1/2\rfloor = k+1$.

Dans tous les cas, l'entier le plus proche de $x$ est $\lfloor x+1/2 \rfloor$, et $g(x)$ est bien la distance de $x$ à l'entier le plus proche de $x$.

***5.*** Courbes représentatives de $g$, $g_1$ et de $g_2$ :




***6.*** Soient $x$ et $y$ deux réels. Comme $g$ est 1-lipschitzienne, on a :

$$|g_n(x) - g_n(y)| = \left|\frac{g(2^n x)}{2^n} - \frac{g(2^n y)}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}\,|g_n(2^n x) - g_n(2^n y)| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|2^n x - 2^n y| = |x-y|$$

Donc $\boxed{g_n \text{ est 1-lipschitzienne.}}$

Sur les intervalles $\left[\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}\right]$, la fonction $g$ est affine de pente $-1$ ou $1$. Donc sur les intervalles $\left[\frac{k}{2^{n+1}}; \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$, $g_n$ est affine de pente $-1$ ou $1$.

**Construction et continuité de $f$.**

*1.* Pour tout entier $n$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = g_{n+1}(x) \geqslant 0$, donc la suite $(f_n(x))$ est croissante.
De plus, comme $g_k$ est majorée par $\frac{1}{2^{k+1}}$ pour tout $k$, on a aussi $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$,
donc $f_n(x) \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} \leqslant 1$, et la suite $(f_n(x))$ est majorée.
Alors, par le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

*2.* Pour tout réel $x$ et pour tout $k$, on a $g_k(x+1) = g_k(x)$.
En sommant pour tous les $k$ de $0$ à $n$, on obtient $f_n(x+1) = f_n(x)$.
Enfin, en passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$, il vient $f(x+1) = f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est 1-périodique.}}$$

De même, comme $g_k(1-x) = g_k(x)$ pour tout $k$, on obtient en sommant $f_n(1-x) = f_n(x)$ pour tout $n$ puis, par passage à la limite, $\boxed{f(x) = f(1-x).}$

*3.* Soit $n$ un entier fixé. Alors, pour tout entier $p \geqslant n$, on a

$$|f_p(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{p} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{p} g_k(x)\right|$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$|f_p(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |g_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Ce qui donne en calculant cette dernière somme :

$$|f_p(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1/2^{n+1} - 1/2^{p+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

On a bien $\boxed{|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}.}$

*4.* Soient $x$ et $y$ tels que $|x - y| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Découpons la quantité $|f(x) - f(y)|$ en trois, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(y)| = |\ (f(x) - f_n(x))\ +\ (f_n(x) - f_n(y))\ +\ (f_n(y) - f(y)\ |$$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant\ |f(x) - f_n(x)|\ +\ |f_n(x) - f_n(y)|\ +\ |f_n(y) - f(y)|$$

et majorons chacun des trois termes.

- On a $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$ d'après la question précédente.
- De même, $|f_n(y) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

- Traitons maintenons le terme du milieu $|f_n(x) - f_n(y)|$. On a d'abord

$$f_n(x) - f_n(y) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) = \sum_{k=0}^{n} (g_k(x) - g_k(y))$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |g_k(x) - g_k(y)|$$

Mais comme chaque fonction $g_k$ est 1-lipschitzienne, on a $|g_k(x) - g_k(y)| \leqslant |x - y| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

On en déduit que $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

On peut conclure : $\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{n+3}{2^n}.}$

***5.*** Soit $x$ un nombre réel.
Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\dfrac{n+3}{2^n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n+3}{2^n} \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$.
Soit alors $\eta = \dfrac{1}{2^n}$.
D'après la question précédente, on a l'implication $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
Ce qui montre que $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ et que $f$ est continue en $x$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

**La fonction $f$ n'est dérivable nulle part.**

***1.*** Remarquons d'abord que pour tout réel $x$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $2\lfloor x \rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$. Par conséquent, $2\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor < 2\lfloor x \rfloor + 2$ et on en déduit que $0 \leqslant \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leqslant 1$, nous nous servirons de cet encadrement dans la suite.

- Monotonie de $(a_n)$ :

On a pour tout entier $n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+2}} \left( \left\lfloor 2 \times 2^{n+1} x \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{n+1} x \right\rfloor \right) \geqslant 0$$

d'après l'inégalité précédemment démontrée. Donc $(a_n)$ est croissante.

- Monotonie de $(b_n)$ :

On a pour tout entier $n$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{n+2}} \left( \left\lfloor 2 \times 2^{n+1} x \right\rfloor - 2 \left\lfloor 2^{n+1} x \right\rfloor - 1 \right) \leqslant 0$$

d'après l'inégalité précédemment démontrée. Donc $(b_n)$ est décroissante.

- Limite de $b_n - a_n$ :

On a $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

Finalement, $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites adjacentes.}}$

Comme $\lfloor 2^{n+1} x \rfloor \leqslant 2^{n+1} x < \lfloor 2^{n+1} x \rfloor + 1$, on obtient en divisant par $2^{n+1}$ : $a_n \leqslant x < b_n$.
En passant à la limite, on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = x}$$

*2.* Pour tout entier $p > n$, on a $g_p(a_n) = \dfrac{1}{2^p} g\left(\underbrace{\dfrac{2^p}{2^{n+1}}\left\lfloor 2^{n+1}x\right\rfloor}_{\in\mathbb{Z}}\right) = 0$ car $g$ s'annule sur $\mathbb{Z}$.

Donc la suite $(f_p(a_n))_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang $n$ et on a bien $\boxed{f(a_n) = f_n(a_n).}$

La preuve est analogue pour $(b_n)$.

*3.* Pour tout $k$ entre 0 et $n$, $g_k$ est affine sur $[a_k; b_k]$. Comme les segments $[a_k; b_k]$ sont emboîtés, $g_k$ est affine sur $[a_n; b_n]$ et donc aussi sur $[a_{n+1}; b_{n+1}]$.

Donc $f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k$ est aussi affine sur $[a_n; b_n]$.

Donc les taux d'accroissements $\dfrac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}}$ et $\dfrac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n}$ sont égaux.

*4.* Posons $k = \left\lfloor 2^{n+2}x\right\rfloor$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} - \Delta_n &= \frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \\
&= \frac{f_{n+1}(b_{n+1}) - f_{n+1}(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f_n(b_n) - f_n(a_n)}{b_n - a_n} \\
&= \frac{f_{n+1}(b_{n+1}) - f_{n+1}(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} - \frac{f_n(b_{n+1}) - f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \\
&= \frac{f_{n+1}(b_{n+1}) - f_{n+1}(a_{n+1}) - f_n(b_{n+1}) + f_n(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \\
&= \frac{g_{n+1}(b_{n+1}) - g_{n+1}(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} \\
&= 2^{n+2}\frac{1}{2^{n+2}}\left(g\left(\frac{k+1}{2}\right) - g\left(\frac{k}{2}\right)\right) \\
&= g\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $\Delta_{n+1} - \Delta_n = 1$ si $k$ est impair, $-1$ si $k$ est pair.

$$\boxed{|\Delta_{n+1} - \Delta_n| = 1}$$

*5.* On a $\lambda_n u_n + (1 - \lambda_n)v_n = v_n + \lambda_n(u_n - v_n)$.

Le terme $v_n$ tend vers $\ell$, le terme $\lambda_n$ est borné et le terme $u_n - v_n$ tend vers 0. On a donc bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (\lambda_n u_n + (1 - \lambda_n)v_n) = \ell}$$

*6.* On pose $u_n = \dfrac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x}$ et $v_n = \dfrac{f(x) - f(a_n)}{x - a_n}$.

On a en particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = f'(x)$.

Posons ensuite $\lambda_n = \dfrac{b_n - x}{a_n - x} \in [0; 1]$, et donc $1 - \lambda_n = \dfrac{x - a_n}{b_n - a_n}$.

On vérifie que $\Delta_n = \lambda_n u_n + (1 - \lambda_n)v_n$ et donc que $\boxed{\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x)}$ d'après la question précédente.

*7.* Il est impossible d'avoir $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x)$, on aurait sinon $|\Delta_{n+1} - \Delta_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f'(x) - f'(x)| = 0$, ce qui contredit la question *4*.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } x.}$

**La fonction $f$ n'est monotone sur aucun intervalle non trivial.**

***1.*** La fonction $g_k$ est affine sur $[x; x_p]$ dès que $k \geqslant p$.

Pour $p \geqslant 2n$, la restriction de $f_p$ à $[x; x_p]$ est une somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_k + \sum_{k=n}^{p} g_k$,
la première somme est une somme de fonctions affines de pentes $\pm 1$, la seconde de pentes 1. Donc $f_p$ a une pente strictement positive pour tout $p \geqslant 2n$. Donc $f(x_p) = f_p(x_p) > f_p(x) = f(x)$.

***2.*** Par densité des réels de la forme $k/2^n$ ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), la fonction $f$ n'est décroissante sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$. Mais comme $f(x) = f(1-x)$, $f$ n'est croissante sur aucun intervalle non plus.