DS 9 – Éléments de correction

Exercice 1 – Techniques

1. • Déterminons un équivalent du terme général : $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} \sim \dfrac{n}{\sqrt{n^3}} = \dfrac{1}{n^{1/2}}$.

Or, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ est divergente ($\alpha \leqslant 1$).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} \text{ est divergente.}}$

• Majorons le terme général : $\dfrac{\cos^2 n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

Or, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha > 1$).

Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \dfrac{\cos^2 n}{n^2} \text{ est convergente.}}$

2. Analyse :

Supposons que (a,b,c) soit un triplet solution. On a $a+b+c=5$ et $abc=-8$, de plus, en multipliant la deuxième et la dernière équation, on a aussi $bc+ac+ab=2$.

Notons P le polynôme $P=(X-a)(X-b)(X-c)$.

En développant, on a $P = X^3-(a+b+c)X^2+(bc+ac+ab)X-abc = X^3-5X^2+2X+8$.

P admet -1 pour racine évidente, après factorisation et résolution les autres racines sont 2 et 4.

Donc $\{a,b,c\} = \{-1,2,4\}$.

Synthèse :

On vérifie aisément que le triplet $\boxed{(-1,2,4) \text{ et les cinq triplets permutés}}$ sont solutions du système.

3. On a $B = X^3-X^2+X-1 = (X-1)X^2+(X-1) = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X+i)(X-i)$.

Donc les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme B sont 1, i et $-i$.

La division euclidienne de A par B s'écrit

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg R < 3$$

Évaluons en 1, i et en $-i$. On obtient les trois équations

$$A(1) = R(1),\ A(i) = R(i) \text{ et } A(-i) = R(-i)$$

Écrivons $R = aX^2+bX+c$, les coefficients a, b et c sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 3 \\ -a & + & ib & + & c & = & i \\ -a & - & ib & + & c & = & -i \end{array}\right.$$

On trouve aisément $a=b=c=1$.

Finalement, le reste dans la division de A par B est égal à $\boxed{X^2+X+1.}$

4. On a $X^4+X^2+1 = (X^4+2X^2+1)-X^2 = (X^2+1)^2-X^2 = \boxed{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$

Comme X^4+X^2+1 est strictement positif sur $\mathbb{R}$, il n'a pas de racine réelle et les deux facteurs X^2+X+1 et X^2-X+1 sont irréductibles.

5. Soit a une racine de P. Alors $P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$, donc a^2 est aussi une racine de P.

Par une récurrence aisée, tous les a^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$) sont des racines de P.

Supposons que $a \neq 0$. Comme P est non nul, il n'a qu'un ensemble fini de racines et les a^{2^n} ne peuvent pas être tous distincts. Il existe donc deux entiers n et m, avec $0 \leqslant n < m$, tels que

$$a^{2^n} = a^{2^m} \text{ d'où } a^{2^m - 2^n} = 1$$

Donc a est une racine de l'unité.

6. La règle de Sarrus donne $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \boxed{2abc.}$

Exercice 2 – Un déterminant tridiagonal

1. On trouve $\boxed{D_2 = 4\cos^2\theta - 1}$ et $\boxed{D_3 = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta.}$

2. En linéarisant, on trouve $4\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta = \sin(3\theta)$ ainsi que $8\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta = \sin(4\theta)$.

$$\text{D'où } \boxed{D_2 = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}} \text{ et } \boxed{D_3 = \frac{\sin(4\theta)}{\sin(\theta)}}$$

3. Développons le déterminant D_n par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]} = 2\cos\theta \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n-1]} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

On reconnaît D_{n-1} dans le premier déterminant obtenu. Développons le deuxième déterminant par rapport à la première ligne. On obtient :

$$D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n-2]}$$

$$\text{donc } \boxed{D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2}}$$

4. La suite (D_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta\, r + 1 = 0$ admet deux racines complexes $r_1 = e^{i\theta}$ et $r_2 = e^{-i\theta}$.
Par conséquent les termes D_n sont de la forme $D_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$.
L'étude des premiers termes donne après calcul $\boxed{\forall n \geqslant 2, D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.}$
Remarque : On peut aussi conjecturer la formule et la montrer par récurrence double...

Exercice 3 – Une diagonalisation

1. On forme la matrice $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ et on calcule son déterminant :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2-\lambda)(1-\lambda) - 6 + 0 - 0 - 6(1-\lambda) + 2(2+\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda - 8$$

D'où $\det(M - \lambda I_3) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+4)$ après factorisation

On en déduit : $\boxed{M - \lambda I_3 \text{ non inversible} \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2, -4\}.}$

2. • <u>Pour $\lambda = 1$</u> : On cherche $\ker(M - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de ce noyau a des coefficients x, y et z qui vérifient

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\ker(M - I_3) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

• <u>Pour $\lambda = 2$</u> : On cherche $\ker(M - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On résout cette fois $\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = {}^4\!/_3\, y \\ z = {}^2\!/_3\, y \end{cases}$

D'où $\boxed{\ker(M - 2I_3) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.}$

• <u>Pour $\lambda = -4$</u> : On cherche $\ker(M + 4I_3) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

On résout $\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = -{}^2\!/_3\, y \end{cases}$

D'où $\boxed{\ker(M + 4I_3) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.}$

3. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme elle contient 3 vecteurs, il suffit de montrer que le déterminant dans la base canonique de la famille $\mathcal{B}$ est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 0 - 6 + 8 - 0 \neq 0 \text{ donc } \mathcal{B} \text{ est une base}$$

Comme par construction $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = -4e_3$, on a

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

4. Le déterminant et la trace de l'endomorphisme f sont égaux au déterminant et à la trace d'une matrice représentative de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^3$. Par commodité, on peut utiliser la matrice diagonale de la question précédente. On trouve

$$\boxed{\operatorname{tr} f = -1 \text{ et } \det f = -8}$$

5. On a d'abord $\det(f^n) = (\det f)^n$, donc $\boxed{\det\, f^n = (-8)^n.}$

Quant à la trace de f^n, elle est égale à la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\operatorname{tr}(f^n) = 1 + 2^n + (-4)^n.}$

Exercice 4 – Polynômes de Legendre

1. ***a)*** $P_0 = 1$ donc $\boxed{L_0 = 1.}$

$P_1 = X^2 - 1$ donc $\boxed{L_1 = 2X.}$

$P_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ donc $\boxed{L_2 = 12X^2 - 4.}$

$P_3 = (X^2 - 1)^3 = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$ donc $\boxed{L_3 = 120X^3 - 72X.}$

b) P_n est de degré $2n$ donc $\boxed{\deg L_n = n.}$

Le monôme dominant de P_n est X^{2n} donc celui de L_n est $(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1) X^n$.

Le coefficient dominant de L_n vaut donc $\boxed{\dfrac{(2n)!}{n!}.}$

c) La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est échelonnée en degrés, avec un exactement un polynôme de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\boxed{(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$

d) Le polynôme P_n est pair. La dérivation change la parité. Donc $\boxed{L_n \text{ a la parité de } n.}$

2. ***a)*** On procède par récurrence finie sur k.

• Pour $k = 0$, le polynôme $P_n^{(0)} = P_n$ n'a pas de racine dans $]-1; 1[$.

• Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Supposons que $P_n^{(k)}$ possède k racines distinctes $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ dans $]-1; 1[$.

Comme 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de P_n, ils sont aussi racines (de multiplicité $n - k > 0$) de $P_n^{(k)}$.

En appliquant le théorème de Rolle à $P_n^{(k)}$ sur les $k+1$ intervalles $[-1; a_1]$, $[a_1; a_2]$, ..., $[a_{k-1}; a_k]$, $[a_k; 1]$, on montre alors l'existence de $k+1$ racines distinctes dans $]-1; 1[$ du polynôme $P_n^{(k+1)}$.

Ce qui achève la récurrence.

b) D'après la question précédente, L_n possède au moins n racines distinctes dans $]-1;1[$. Comme L_n est de degré n, la somme des multiplicités de ses racines est inférieures ou égale à n. On en déduit que les n racines déjà trouvées sont simples et qu'il n'y en a pas d'autre. Donc $\boxed{L_n \text{ est scindé à racines simples et toutes ses racines appartiennent à }]-1;1[.}$

3. Appliquons la formule de Leibniz :

$$L_n = [(X+1)^n(X-1)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X+1)^n]^{(k)} [(X-1)^n]^{(n-k)}$$

Évaluons ensuite la somme obtenue en 1. Le réel 1 est racine de $[(X-1)^n]^{(n-k)}$, sauf pour $k=0$ (La dérivée n-ième de $(X-1)^n$ est $\binom{2n}{n}$). Il ne reste donc qu'un terme non nul dans la somme :

$$L_n(1) = \binom{n}{0}(1+1)^n \binom{2n}{n} \text{ donc } \boxed{L_n(1) = 2^n \binom{2n}{n}}$$

D'après la question ***1d***, $\boxed{L_n(-1) = (-2)^n \binom{2n}{n}.}$

4. ***a)*** Pour la première relation, on part de $P_{n+1} = (X^2-1)^{n+1}$ et on dérive :
$P'_{n+1} = (n+1)2X(X^2-1)^n$, c'est-à-dire $\boxed{P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n.}$
Repartons de $P'_{n+1} = 2(n+1)X(X^2-1)^n$ et dérivons une nouvelle fois :

$$P''_{n+1} = 2(n+1)(X^2-1)^n + (n+1)2X \times n2X(X^2-1)^{n-1}$$

$$P''_{n+1} = 2(n+1)(X^2-1)^n + 4n(n+1) \underbrace{X^2}_{=X^2-1+1} (X^2-1)^{n-1}$$

$$P''_{n+1} = [2(n+1) + 4n(n+1)](X^2-1)^n + 4n(n+1)(X^2-1)^{n-1}$$

$$\boxed{P''_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n + 4n(n+1)P_{n-1}}$$

b) Dérivons n fois l'identité (1) à l'aide de la formule de Leibniz :

$$P_{n+1}^{(n+1)} = \binom{n}{0} 2(n+1)XP_n^{(n)} + \binom{n}{1} 2(n+1)P_n^{(n-1)}$$

$$\text{Donc } L_{n+1} = 2(n+1)XL_n + 2n(n+1)P_n^{(n-1)}$$

Dérivons $n-1$ fois l'identité (2) :

$$P_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)P_{n-1}^{(n-1)}$$

$$\text{Donc } L_{n+1} = 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} + 4n(n+1)L_{n-1}$$

En isolant les termes en $P_n^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} 2n(n+1)P_n^{(n-1)} = L_{n+1} - 2(n+1)XL_n & (A) \\ 2(n+1)(2n+1)P_n^{(n-1)} = L_{n+1} - 4n(n+1)L_{n-1} & (B) \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à calculer $(2n+1) \times (A) - n \times (B)$:

$$0 = (n+1)L_{n+1} - 2(n+1)(2n+1)XL_n + 4n^2(n+1)L_{n-1}$$

Donc $\boxed{L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}.}$

5. On a $P_n = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{2k}$.

On dérive n fois :

$$P_n^{(n)} = \sum_{k=\lceil n/2\rceil}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}X^{2k-n}$$

$$\boxed{L_n = n! \sum_{k=\lceil n/2\rceil}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{2k}{n}X^{2k-n}}$$

Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\boxed{L_n = n! \sum_{k=\lceil n/2\rceil}^{n} (-1)^{n-k}\binom{2k}{k}\binom{2k}{n-k}X^{2k-n}}$$

6. ***a)*** Soient n et m tels que $n > m$. On veut montrer que $I = \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(t)P_m^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On procède par intégrations par parties successives, en utilisant le fait que 1 et -1 sont racines de $P_a^{(b)}$ pour tout $b < a$:

$$I = \Big[P_n^{(n-1)}(t)P_m^{(m)}(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(t)P_m^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} P_n^{(n-1)}(t)P_m^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$I = -\Big[P_n^{(n+2)}(t)P_m^{(m-1)}(t)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} P_n^{(n-2)}(t)P_m^{(m+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P_n^{(n-2)}(t)P_m^{(m+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{... au bout de } n \text{ étapes : } I = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n(t)\underbrace{P_m^{(m+n)}(t)}_{=0}\,\mathrm{d}t = 0$$

On a bien $\boxed{\int_{-1}^{1} L_n(t)\,L_m(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Exprimons P sur la base $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k L_k \quad (\lambda_k \in \mathbb{R})$$

Par linéarité de l'intégrale, on a alors :

$$\int_{-1}^{1} L_n(t)\,P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \underbrace{\int_{-1}^{1} L_n(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \boxed{0}$$

Exercice 5 – Interpolation

1. ***a)*** • Soient P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On montre que $\Phi(\lambda P + Q) = \cdots = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$ et Φ est linéaire.

• Montrons que Φ est injective. Soit $P \in \ker\Phi$.

Alors $P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0$, donc P a au moins $n+1$ racines distinctes. Mais P appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, il est de degré au plus n. Donc $P = 0$. D'où $\ker\Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

• Comme $\dim\mathbb{R}_n[X] = \dim\mathbb{R}^{n+1} = n+1$, Φ est aussi surjective.

Finalement $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$

b) Le polynôme U_i vérifie

$$U_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\} \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$

Donc U_i admet n racines distinctes x_k (pour $k \neq i$), il est donc divisible par $\prod\limits_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} (X - x_k)$.

Comme $\deg U_i \leqslant n$ et $\deg \prod\limits_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} (X - x_k) = n$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U_i = \lambda \prod\limits_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} (X - x_k)$.

Pour trouver λ, évaluons en x_i : $U_i(x_i) = 1 = \lambda \prod\limits_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} (x_i - x_k)$.

Donc $\lambda = \left(\prod\limits_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} (x_i - x_k) \right)^{-1}$ et on a le résultat voulu :

$$\boxed{U_i = \prod_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}}$$

c) L'image réciproque d'une base par un isomorphisme est une base.

d) Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Le polynôme X^k s'écrit :

$$X^k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i U_i$$

et on cherche les scalaires λ_i. Évaluons en un x_j ($j \in [\![0;n]\!]$). On a $U_i(x_j) = 0$ lorsque $i \neq j$, et $U_j(x_j) = 1$. Il ne reste de la somme que :

$$x_j^k = \lambda_j$$

On a donc trouve la décomposition de X^k sur la base $(U_0,U_1,\ldots,U_n)$:

$$X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k U_i$$

On peut alors construire la matrice demandée :

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(U_0,U_1,\ldots,U_n)}(1,X,\ldots,X^n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}}$$

Le déterminant de cette matrice est un déterminant de Vandermonde, égal à

$$\boxed{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)}$$

e) P_f est simplement l'antécédent par Φ de $(f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n))$.

2. ***a)*** Le polynôme $Q_f - P_f$ s'annule en tous les x_k ($k \in [\![0;n]\!]$), il est donc divisible par W.
De plus, $Q_f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $Q_f - P_f$ est de degré au plus $n + 1$, alors que W est de degré $n + 1$.
Donc $\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q_f - P_f = \lambda W.}$

b) La fonction $h = f - Q_f$ s'annule en les $n+2$ points x_0, x_1, ..., x_n, $\overline{x}$.

Par applications répétées du théorème de Rolle les segments de bornes deux racines successives, sa dérivée h' s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a;b]$, sa dérivée seconde h'' au moins n fois, ..., sa dérivée $n+1$-ième $h^{(n+1)}$ au moins une fois.

Donc $\boxed{\text{il existe un } \theta \in \ ]a;b[\text{ tel que } h^{(n+1)}(\theta) = 0.}$

c) Le polynôme P_f est de degré au plus n, donc $P_f^{(n+1)} = 0$.

Le polynôme W est de degré $n+1$ et de monôme dominant X^{n+1}, donc $W^{(n+1)} = (n+1)!$.

Comme $h = f + P_f - \lambda W$, alors $h^{(n+1)} = f^{(n+1)} - \lambda(n+1)!$.

En évaluant en θ, on en déduit $0 = f^{(n+1)}(\theta) - \lambda(n+1)!$, d'où $\boxed{\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.}$

La fonction h s'annule en $\overline{x}$, donc $f(\overline{x}) = Q_f(\overline{x}) = P_f(\overline{x}) - \lambda W(\overline{x})$. On en déduit

$$\boxed{f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times W(\overline{x}).}$$

d) On a $|f(\overline{x}) - P_f(\overline{x})| = \dfrac{1}{(n+1)!} \times \left|f^{(n+1)}(\theta)\right| \times |W(\overline{x})|$ avec $|W(\overline{x})| \leqslant \sup_{[a;b]} |W|$ et $\left|f^{(n+1)}(\theta)\right| \leqslant \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$.

On a donc $|f(\overline{x}) - P_f(\overline{x})| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times \sup_{[a;b]} |W| \times \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$.

Cette majoration est vérifiée quelque soit le choix de $\overline{x} \in [a;b] \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Elle est aussi trivialement vérifiée en x_0, x_1, ..., x_n, le membre de gauche étant alors nul. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall t \in [a;b]\,,\ |f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times \sup_{[a;b]} |W| \times \sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|}$$

Remarque pour conclure :

Dans la majoration ci-dessus, la valeur de $\sup_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$ est imposée par la fonction f.

En revanche, $\sup_{[a;b]} |W|$ ne dépend que du choix des points d'interpolations x_0, x_1, ..., x_n.
Pour obtenir un polynôme d'interpolation qui approche bien la fonction f, on a intérêt à choisir les points d'interpolation judicieusement, en cherchant à minimiser $\sup_{[a;b]} |W|$.

On peut démontrer qu'une subdivision régulière de $[a;b]$ n'est pas un choix optimal. La meilleure subdivision est celle des $x_k = a + (b-a)\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$, $k \in [\![0;n]\!]$, plus concentrée sur les bords qu'au centre de l'intervalle.