DM9 – Corrigé

Exercice 1 – Dénombrement des dérangements

1. ***a.*** • La seule permutation qui n'a que des points fixes est l'identité, donc $F(N,N) = 1$.

• Une permutation ne peut pas avoir exactement $N - 1$ points fixes : si on a $N - 1$ points fixes alors le N-ième point est aussi un point fixe. Donc $F(N,N - 1) = 0$.

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} F(N,k)$ est le nombre total de permutations de N éléments, donc $N!$.

2. ***a.*** On peut donner les dérangements $\sigma : [\![1;3]\!] \to [\![1;3]\!]$ par leur tableau de valeurs, il n'y en a que deux :

k	1	2	3
$\sigma(k)$	2	3	1

k	1	2	3
$\sigma(k)$	3	1	2

Comme il n'y a pas de dérangement de $\{1\}$ et comme il n'y a qu'un dérangement de $\{1,2\}$ (la permutation qui échange 1 et 2), on a $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$ et $\omega_3 = 2$.

b. Choisir une permutation à k points fixes, c'est

– Choisir les k points fixes : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.

– Choisir une permutation sans point fixe des $N - k$ points restant : ω_{N-k} possibilités.

D'où $F(N,k) = \dbinom{N}{k}\omega_{N-k}$.

c. On substitue le résultat précédent dans l'égalité de la question ***1b*** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\omega_{N-k} = N!$.

Puis on remplace $\dbinom{N}{k}$ par $\dfrac{N!}{k!(N-k)!}$ et on divise tout par $N!$: on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$.

d. On raisonne par récurrence forte.

• Pour $N = 0$ on a bien $\dfrac{\omega_0}{0!} = 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{k!}$

• Soit $N \in \mathbb{N}$, supposons la formule vérifiée pour tous les $k < N$.

On part de $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$ et on isole le terme en $k = 0$: $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!}$.

On utilise l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{N-k}\frac{(-1)^p}{p!}$.

On entre le facteur $1/k!$ dans la somme : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{N-k}\frac{(-1)^p}{k!p!}$.

On effectue le changement d'indice $q = p + k$: $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N}\sum_{q=k}^{N}\frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$.

On écrit une somme double : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{1\leqslant k\leqslant q}\frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$.

On redécompose en échangeant les indices : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{q=1}^{N}\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$.

On fait apparaître un coefficient du binôme : $\displaystyle\frac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{q=1}^{N}\frac{(-1)^q}{q!}\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k$.

On reconnaît une formule du binôme : $\dfrac{\omega_N}{N!} = 1 - \sum_{q=1}^{N} \dfrac{(-1)^q}{q!}\left((-1+1)^q - 1\right)$.

Soit, après simplification : $\dfrac{\omega_N}{N!} = 1 + \sum_{q=1}^{N} \dfrac{(-1)^q}{q!}$.

Il ne reste plus qu'à faire rentrer le premier terme et on a gagné : $\dfrac{\omega_N}{N!} = \sum_{q=0}^{N} \dfrac{(-1)^q}{q!}$.

e. On a $u_N = \sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

• D'une part, $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{(2n+2)!} - \dfrac{1}{(2n+1)!} \leqslant 0$ donc la suite (u_{2n}) est décroissante.

• D'autre part, $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \dfrac{1}{(2n+2)!} - \dfrac{1}{(2n+3)!} \geqslant 0$ donc la suite (u_{2n+1}) est croissante.

• Enfin, $u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{-1}{(2n+1)!} \longrightarrow 0$.

Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et elles convergent vers une même limite ℓ. Donc (u_n) converge aussi vers ℓ.

Remarque : Il sera possible de montrer plus tard dans l'année que la limite de (u_n) vaut en fait $1/e \approx 0{,}37$. Pour n assez grand il y a à peu près 37% de chances qu'aucune des n personnes participant à un noël canadien ne tire son propre nom !

Exercice 2 – Un critère de convergence

1. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ et comme $\ell < \dfrac{\ell+1}{2}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{\ell+1}{2}$ APCR.

Mais comme $\dfrac{\ell+1}{2} \leqslant 1$, alors (u_n) est décroissante APCR. Comme elle est de plus minorée par 0, elle converge vers une limite finie $a \in \mathbb{R}$ par le théorème de convergence monotone.
Montrons que $a = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si a était non nul, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ convergerait vers $\dfrac{a}{a} = 1$, ce qui contredirait $\ell < 1$.
Finalement on a bien $u_n \to 0$.

2. À la manière de la question précédente, on a $\ell > \dfrac{\ell+1}{2}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{\ell+1}{2}$ APCR.

Comme $\dfrac{\ell+1}{2} \geqslant 1$, on en déduit que (u_n) est croissante APCR.
Par conséquent (u_n) converge vers une limite a (finie ou infinie selon si (u_n) est ou non majorée). Comme (u_n) est croissante, on a $a \geqslant u_0$ et donc $a > 0$. Montrons que $a = +\infty$ en raisonnant par l'absurde. Si on avait $a \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ convergerait vers $\dfrac{a}{a} = 1$, ce qui contredirait $\ell > 1$.
Finalement on a bien $u_n \to +\infty$.

3. ***a)*** • La suite de terme général $u_n = n$ convient comme premier exemple.

• Comme deuxième exemple on peut prendre $u_n = \dfrac{1}{n}$.

• Comme troisième exemple on peut prendre tout simplement $u_n = 2$.

b) • Montrons d'abord que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1. Pour cela nous allons former l'expression $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \frac{\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})}{u_n}$$

Or, $\quad \cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n}) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)$

En majorant, $\quad \left|\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)\right|$

Mais $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos(\pi\sqrt{n+1}) - \cos(\pi\sqrt{n})$ tend vers 0 par théorème d'encadrement.
De plus, le facteur $\dfrac{1}{u_n}$ est bornée par $\dfrac{1}{3}$ et 1, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ tend bien vers 0.
On a bien montré $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
• Pour montrer que (u_n) n'a pas de limite, on peut extraire de cette suite deux sous-suites qui ont des limites distinctes :

$$u_{4n^2} = 2 + \cos(2\pi n) = 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$$
$$u_{(2n+1)^2} = 2 + \cos(2\pi n + \pi) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

4. ***a)*** On a $w_n = \sum_{k=0}^{n} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) = \ln u_{n+1} - \ln u_0$ par télescopage.

b) $v_n = \ln\left(1 + \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$

c) Comme $nv_n \to a$ (d'après la question précédente), alors $nv_n > \dfrac{a}{2}$ APCR.
On a donc bien $v_n > \dfrac{a}{2n}$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.
Mais alors, pour $n \geqslant N$, on a

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{N-1} v_k + \sum_{k=N}^{n} v_k$$
$$w_n \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} v_k + \sum_{k=N}^{n} \frac{a}{2k} = \sum_{k=0}^{N-1} v_k + \frac{a}{2}(H_n - H_{N-1})$$
$$w_n \geqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} v_k - \frac{a}{2}H_{N-1}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{a}{2}}_{\beta} H_n$$

Mais alors, comme $H_n \to +\infty$, on en déduit que $w_n \to +\infty$.
D'après la question ***4a*** il s'ensuit que $\ln u_{n+1} \to +\infty$ et donc que $u_n \to +\infty$.

d) On montre successivement que $v_n < \dfrac{a}{2n}$ APCR, puis qu'il existe deux constantes $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$ et $\delta \in \mathbb{R}$ telles que $w_n \leqslant \gamma H_n + \delta$ APCR.
Mais alors $w_n \to -\infty$ et donc $\ln u_{n+1} \to -\infty$ et on en déduit que $u_n \to 0$.

5. Posons $u_n = \binom{2n}{n} 4^{-n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2\, 4^n}$ et formons le produit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2\, 4^{n+1}} \times \frac{n!^2\, 4^n}{(2n)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)}{2(n+1)}$$

Mais alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{(2n+1)}{2(n+1)} - 1 = \dfrac{-1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.
On en déduit que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'après la résultat de la question ***4***, on obtient $\binom{2n}{n} 4^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.