DM11 – Corrigé

Exercice 1

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et (a,b,c,d), $(a',b',c',d') \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f\Big(\lambda(a,b,c,d)+(a',b',c',d')\Big) & = & f\Big((\lambda a+a', \lambda b+b', \lambda c+c', \lambda d+d')\Big) \\ & = & (\lambda a+a'+\lambda b+b', \lambda a+a'-\lambda b-b', \lambda b+b'+\lambda d+d') \\ & = & \lambda(a+b, a-d, b+d)+(a'+b', a'-d', b'+d') \\ & = & \lambda f\Big((a,b,c,d)\Big)+f\Big((a',b',c',d')\Big) \end{array}$$

Donc f est linéaire.

2. On explicite les éléments de $\ker f$.
Soit $x=(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Alors $x \in \ker f$ si et seulement si a, b, c et d sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & 0 \\ a & & & - & d & = & 0 \\ & & b & + & d & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{qui équivaut à} \quad \left\{\begin{array}{c} b=-a \\ d=a \end{array}\right.$$

Donc $\ker f$ contient exactement les vecteurs de la forme $(a,-a,c,a)$ où a et c sont des réels quelconques. Comme $(a,-a,c,a)=a(1,-1,0,1)+c(0,0,1,0)$, les vecteurs $(1,-1,0,1)$ et $(0,0,1,0)$ forment une famille génératrice de $\ker f$. On en déduit que $\ker f$ est un plan vectoriel vérifiant $\ker f = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,0,1),(0,0,1,0)\Big)$.

3. Les éléments de $\mathrm{Im}\, f$ sont exactement les vecteurs de la forme $(a+b,a-d,b+d)$ où a, b et d parcourent $\mathbb{R}$. Comme $(a+b,a-d,b+d)=a(1,1,0)+b(1,0,1)+d(0,-1,1)$, on en déduit $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(1,0,1),(0,-1,1)\Big)$.
De plus, le troisième vecteur est combinaison linéaire des deux autres : $(0,-1,1)=(1,0,1)-(1,1,0)$.
On a donc $\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(1,0,1)\Big)$.

4. • Montrons d'abord que $F \cap \ker f=\{0\}$.
Soit $x \in F \cap \ker f$. Comme $x \in F$, x s'écrit $\lambda e_1+\mu e_2=(\lambda,\mu,0,0)$, où λ, μ sont deux réels.
Comme $x \in \ker f$, on a $f(x)=0$ et donc $(\lambda+\mu, \lambda, \mu)=(0,0,0)$.
On en déduit $\lambda=\mu=0$, d'où $x=0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $F \cap \ker f \subset \{0\}$. Comme $F \cap \ker f$ est un sev, on a l'inclusion réciproque, donc F et $\ker f$ sont en somme directe.
• Montrons maintenant que $F \oplus \ker f = E$. On a déjà l'inclusion $\subset$, il nous suffit de montrer l'inclusion réciproque $\supset$.
Soit $x \in E$. Alors x s'écrit $x=(a,b,c,d)$ et on peut remarquer que

$$x=(a-d)\Big(1,0,0,0\Big)+(b+d)\Big(0,1,0,0\Big)+c\Big(0,0,1,0\Big)+d\Big(1,-1,0,1\Big)$$

$$\text{avec } (a-d)\Big(1,0,0,0\Big)+(b+d)\Big(0,1,0,0\Big) \in F \text{ et } c\Big(0,0,1,0\Big)+d\Big(1,-1,0,1\Big) \in \ker f$$

On en déduit que $x \in F \oplus \ker f$.

Ce qui achève la démonstration : on a bien $F \oplus \ker f = E$ (F et $\ker f$ sont supplémentaires).

On peut utiliser l'égalité précédente pour écrire la décomposition de (1,2,3,4) sur $F \oplus \ker f$:

$$(1,2,3,4) = \underbrace{(-3,6,0,0)}_{\in F} + \underbrace{(4,-4,3,4)}_{\in \ker f}$$

5. (On peut y aller un peu au hasard...)
Posons $u = (1,0,0)$ et montrons que $\mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

• Soit $x \in \mathrm{Vect}(u) \cap \mathrm{Im}\, f$. Alors x est de la forme $x = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, comme $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(1,0,1)\Big)$, on a aussi $x = \mu(1,1,0) + \nu(1,0,1)$.

De $\lambda(1,0,0) = \mu(1,1,0) + \nu(1,0,1)$ on en déduit le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & - & \nu & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & & & = & 0 \\ & - & \mu & - & \nu & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{qui équivaut à} \quad \lambda = \mu = \nu = 0$$

Par conséquent $x = 0_{\mathbb{R}^3}$ et on a $\mathrm{Vect}(u) \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$: les sev $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont en somme directe.

• Montrons maintenant que $\mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$. L'inclusion $\subset$ est déjà vérifiée, il suffit de montrer l'inclusion $\supset$.
Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On cherche trois scalaires λ, μ, ν tels que

$$(a,b,c) = \underbrace{\lambda(1,0,0)}_{\in \mathrm{Vect}(u)} + \underbrace{\mu(1,1,0) + \nu(1,0,1)}_{\in \mathrm{Im}\, f}$$

On peut trouver λ, μ et ν en résolvant un système, ou simplement remarquer que $\lambda = a - b - c$, $\mu = b$ et $\nu = c$ conviennent.
On a donc bien $\mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Vect}(u)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 2

1. ***a)*** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et f, $g \in \mathcal{L}(E)$.
On a $\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g) \circ u = \lambda f \circ u + g \circ u = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$ donc Φ est bien linéaire.

b) On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \ker \Phi$. On veut montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset \ker f$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
Comme $\Phi(f) = 0$, on a $f \circ u = 0$ et donc $f(u(x)) = 0$. On en déduit $f(y) = 0$ et $y \in \ker f$.

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, u \subset \ker f$.
Alors, pour tout $x \in E$ on a $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$ et donc $f(u(x)) = 0$. On en déduit $f \circ u = 0$, c'est-à-dire $\Phi(f) = 0$ et donc $f \in \ker \Phi$.

Finalement, on a bien montré $\ker \Phi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}\, u \subset \ker f\}$.
Si u est surjective alors $\mathrm{Im}\, u = E$ et donc $\ker \Phi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \ker f = E\} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On en déduit qu'alors Φ est injective.

2. **a)** Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$.
On a $\Psi(\lambda f + g) = u \circ (\lambda f + g) = \lambda u \circ f + u \circ g = \lambda \Psi(f) + \Psi(g)$ donc Ψ est bien linéaire.

b) On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in \ker \Psi$. On veut montrer que $\operatorname{Im} f \subset \ker u$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $\Psi(f) = 0$, on a $u \circ f = 0$ et donc $u(f(x)) = 0$. On en déduit $u(y) = 0$ et $y \in \ker u$.

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f \subset \ker u$.
Alors, pour tout $x \in E$ on a $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et donc $u(f(x)) = 0$. On en déduit $u \circ f = 0$, c'est-à-dire $\Psi(f) = 0$ et donc $f \in \ker \Psi$.

Finalement, on a bien montré $\ker \Psi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \ker u\}$.
Si u est injective alors $\ker u = \{0\}$ et donc $\ker \Psi = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f = \{0\}\} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.
On en déduit qu'alors Ψ est injective.

3. • Montrons d'abord les équivalences $\Phi^2 = 0 \iff \Psi^2 = 0 \iff u^2 = 0$:
Si $\Phi^2 = 0$ alors $\Phi(\Phi(\mathrm{Id}_E)) = 0$ et donc $\mathrm{Id}_E \circ u \circ u = u^2 = 0$.
Si $u^2 = 0$, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ on a $\Phi(\varphi(f)) = f \circ u \circ u = 0$ et donc $\Phi^2 = 0$.
On a donc bien l'équivalence $\Phi^2 = 0 \iff u^2 = 0$, l'équivalence $\Psi^2 = 0 \iff u^2 = 0$ se démontre de façon analogue.

• Montrons maintenant que $u^2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \ker u$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $u^2 = 0$ et montrons que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
Soit $u \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe un $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $u^2 = 0$ on a alors $u(y) = u^2(x) = 0$ et donc $y \in \ker u$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\operatorname{Im} u \subset \ker u$. Soit $x \in E$. Comme $u(x) \in \operatorname{Im} u$ on a $u(x) \in \ker u$ et donc $u(u(x)) = u^2(x) = 0$. On a bien montré $u^2 = 0$.

Ce qui achève la démonstration.

Exercice 3

1. **a)** Montrons que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in \ker(u^n)$.
Alors on a $u^n(x) = 0$, en appliquant u on obtient $u^{n+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(u^{n+1})$.
On a bien montré $K_n \subset K_{n+1}$.

b) • Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\ker(u^n) = \ker(u^{n+1})$ et démontrons que $\ker(u^{n+1}) = \ker(u^{n+2})$.
On sait déjà que $\ker(u^{n+1}) \subset \ker(u^{n+2})$, montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \ker(u^{n+2})$. Alors $u^{n+2}(x) = 0$, autrement dit $u^{n+1}(u(x)) = 0$.
Par conséquent $u(x) \in \ker(u^{n+1})$.
Comme $\ker(u^{n+1}) = \ker(u^n)$, on en déduit que $u(x) \in \ker(u^n)$ et donc que $u^n(u(x)) = 0$.
On obtient bien $u^{n+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(u^{n+1})$.
L'inclusion est démontrée.

• On sait déjà que la suite (K_n) est croissante. Si elle n'est pas strictement croissante, alors il existe un plus petit entier k pour lequel $K_k = K_{k+1}$. Alors, d'après l'implication que l'on vient de démontrer et par récurrence immédiate, (K_n) est stationnaire à partir du rang k.

On a donc bien : $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'à un certain rang à partir duquel elle stationne.

2. ***a)*** Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$.
Alors il existe un vecteur x tel que $y = u^{n+1}(x)$.
Comme $y = u^n(u(x))$, on a $y \in \mathrm{Im}(u^n)$ et on a bien démontré $I_{n+1} \subset I_n$.

b) • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$ et démontrons que $\mathrm{Im}(u^{n+1}) = \mathrm{Im}(u^{n+2})$.
On sait déjà que $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \supset \mathrm{Im}(u^{n+2})$, montrons l'inclusion réciproque.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$. Alors il existe un vecteur x tel que $y = u^{n+1}(x) = u(u^n(x))$.
Comme on a $u^n(x) \in \mathrm{Im}(u^n)$ et comme $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$, il existe un vecteur z tel que $u^n(x) = u^{n+1}(z)$.
Alors $y = u(u^{n+1}(z)) = u^{n+2}(z)$ et on en déduit l'inclusion $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset \mathrm{Im}(u^{n+2})$.

• On sait déjà que la suite (I_n) est croissante. Si elle n'est pas strictement croissante, alors il existe un plus petit entier i pour lequel $I_i = I_{i+1}$. Alors, d'après l'implication que l'on vient de démontrer et par récurrence immédiate, (I_n) est stationnaire à partir du rang i.

On a donc bien : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit strictement décroissante, soit strictement décroissante jusqu'à un certain rang à partir duquel elle stationne.

3. ***a)*** La partie I est trivialement un sev comme intersection d'une famille de sev.
Pour K il y a en revanche une démonstration à faire.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in K$. On veut montrer que $\lambda x + y \in K$.
Comme $x \in K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, il existe un entier p tel que $x \in K_p$.
De même, il existe un entier q tel que $y \in K_q$.
Notons $r = \max(p,q)$.
Comme la suite (K_n) est croissante pour l'inclusion, on a $x \in K_r$ et $y \in K_r$.
Comme K_r est un sev, on en déduit alors $\lambda x + y \in K_r$ et finalement $\lambda x + y \in K$.
Donc K (qui est aussi non vide puisqu'il contient 0) est un sev de E.

b) • Montrons d'abord $u(K) \subset K$.
Soit $x \in K$. Alors il existe un entier p tel que $x \in K_p$, c'est-à-dire $u^p(x) = 0$. Mais alors $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = 0$, donc $u(x) \in K_p$ et donc $u(x) \in K$. Donc K est stable par u.

• On a $u(I) = u\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^n)\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} u\left(\mathrm{Im}(u^n)\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u^{n+1}) \subset I$.
Donc I est stable par u.

c) Si u est un automorphisme alors tous les u^n aussi et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ les égalités $\ker(u^n) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(u^n) = E$.
On en déduit $K = \{0\}$ et $I = E$.

d) Si u est nilpotent alors $u^n = 0$ à partir d'un certain rang, donc $\ker(u^n) = E$ et $\mathrm{Im}(u^n) = \{0\}$ à partir d'un certain rang.
On en déduit $K = E$ et $I = \{0\}$.

e) On remarque que u est nilpotent d'indice 2, donc $K = \mathbb{R}^2$ et $I = \{0\}$.

4. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\ker(u^n) \neq \ker(u^{n+1})$ et $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$.
On veut montrer que $\ker(u^{n+1}) \neq \ker(u^{n+2})$.
Comme $\ker(u^n) \subsetneq \ker(u^{n+1})$, il existe un vecteur x qui appartient à $\ker(u^{n+1})$ mais pas à $\ker(u^n)$. On a alors $u^{n+1}(x) = 0$ mais $u^n(x) \neq 0$.
Le vecteur $u^n(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(u^n)$ et on sait que $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$, on en déduit qu'il existe un $z \in E$ tel que $u^n(x) = u^{n+1}(z)$.
Remarquons qu'alors $u^{n+1}(z) = u^n(x) \neq 0$ mais $u^{n+2}(z) = u^{n+1}(x) = 0$.
Donc z appartient à $\ker(u^{n+2})$ mais pas à $\ker(u^{n+1})$.
On a bien montré $\ker(u^{n+1}) \neq \ker(u^{n+2})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\ker(u^n) = \ker(u^{n+1})$ et que $\mathrm{Im}(u^n) \neq \mathrm{Im}(u^{n+1})$.
On veut montrer que $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \neq \mathrm{Im}(u^{n+2})$.
Comme $\mathrm{Im}(u^n) \supsetneq \mathrm{Im}(u^{n+1})$, il existe un vecteur y qui appartient à $\mathrm{Im}(u^n)$ mais pas à $\mathrm{Im}(u^{n+1})$. Le vecteur y s'écrit donc $y = u^n(x)$ avec $x \in E$.
Il suffit de montrer que $u(y) \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$ mais que $u(y) \notin \mathrm{Im}(u^{n+2})$ et on aura obtenu le résultat voulu.

• Comme $u(y) = u^{n+1}(x)$, on a bien $u(y) \in \mathrm{Im}(u^{n+1})$.

• Pour montrer que $u(y) \notin \mathrm{Im}(u^{n+2})$, raisonnons par l'absurde et supposons qu'on puisse écrire $u(y) = u^{n+2}(z)$, où $z \in E$.
On a alors $u^{n+1}(x) = u^{n+2}(z)$, donc $u^{n+1}(x) - u^{n+1}(u(z)) = 0$, et finalement, par linéarité, $u^{n+1}(x - u(z)) = 0$.
On en déduit $x - u(z) \in \ker(u^{n+1})$.
On utilise l'hypothèse $\ker(u^{n+1}) = \ker(u^n)$: le vecteur $x - u(z)$ appartient à $\ker(u^n)$ et on a $u^n(x - u(z)) = 0$, ce qui implique $u^n(x) = u^{n+1}(z)$ et donc $y = u^{n+1}(z)$.
Mais alors on a contredit l'hypothèse $y \notin \mathrm{Im}(u^{n+1})$.
C'est absurde et on a bien $u(y) \notin \mathrm{Im}(u^{n+2})$.

Finalement, on a trouvé un élément $u(y)$ de $\mathrm{Im}(u^{n+1})$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Im}(u^{n+2})$ et on en déduit $\mathrm{Im}(u^{n+1}) \neq \mathrm{Im}(u^{n+2})$.

c) • Supposons $k < i$.
Alors, au rang $n = i - 1$, on a $\ker(u^n) = \ker(u^{n+1})$ (La suite des noyaux stationne depuis le rang $k \leqslant n$).
On a aussi $\mathrm{Im}(u^n) \neq \mathrm{Im}(u^{n+1})$ et $\mathrm{Im}(u^{n+1}) = \mathrm{Im}(u^{n+2})$ (La suite des images stationne à partir du rang $i = n + 1$).
Mais cela contredit l'implication de la question ***4b***.

• Supposons $k > i$.
Alors, au rang $n = k - 1$, on a $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$ (La suite des images stationne depuis le rang $i \leqslant n$).
On a aussi $\ker(u^n) \neq \ker(u^{n+1})$ et $\ker(u^{n+1}) = \ker(u^{n+2})$ (La suite des noyaux stationne à partir du rang $k = n + 1$).
Mais cela contredit l'implication de la question ***4a***.

On doit donc avoir $k = i$.

d) Comme K est stable par u (c'est la question ***3a***), l'endomorphisme u_K est bien défini.
Montrons qu'il est nilpotent.
La suite des noyaux est croissante et stationnaire à partir du rang k :

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_k = K_{k+1} = \ldots$$

La réunion K des K_n est donc égale à K_k.
Mais alors tout vecteur x de K est dans K_k et vérifie par conséquent $u^k(x) = 0$.
On en déduit que u_K est bien nilpotent d'indice inférieur ou égal à k (On pourrait voir que cet indice est en fait exactement égal à k).

e) Comme I est stable par u (c'est la question ***3a***), l'endomorphisme u_I est bien défini.

• Montrons que u_I est injectif.
Soit $y \in \ker(u_I)$.
On sait que la suite des images est décroissante et stationnaire à partir du rang $i = k$:

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots \supsetneq I_i = I_{i+1} = \ldots$$

et donc que l'intersection I des I_n est égale à I_i.
Donc y, qui est un vecteur de I, s'écrit $y = u^i(x)$ avec $x \in E$.
Comme $u(y) = 0$, on a $u^{i+1}(x) = 0$ et $x \in \ker(u^{i+1})$.
Mais la suite (K_n) est également stationnaire à partir du rang i, par conséquent $x \in \ker(u^i)$.
On en déduit que $u^i(x) = 0$, c'est-à-dire $y = 0$.
On a montré que $\ker(u_I) = \{0\}$ et donc que u_I est injectif.

• Montrons que u_I est surjectif.
Soit $y \in I$, on veut montrer qu'il existe un x tel que $y = u(x)$.
Le vecteur y appartient à I et on a vu que $I = I_i = I_{i+1}$.
Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u^{n+1}(x)$.
Mais alors, en notant $z = u^n(x)$, on a bien $z \in I$ et $y = u(z)$.
On a donc $\mathrm{Im}(u_I) = I$ et u_I est surjectif.

Finalement, u_I est un automorphisme de I.