DM15 – Corrigé

Partie A

1. Écrivons la formule de Taylor à la fonction arctan (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur l'intervalle $[0;x]$, à l'ordre $2n+1$:

$$\arctan x = \underbrace{\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\arctan^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{Polynôme de Taylor}} + \int_0^x \frac{\arctan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$$

Mais le polynôme de Taylor à l'ordre $2n+1$ qui apparaît dans la formule est précisément S_n (il s'agit aussi la partie régulière du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction arctan et il est déjà connu via le formulaire des développements limités).

On a donc $\boxed{R_n(x) = \int_0^x \frac{\arctan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t.}$

2. ***a)*** On vérifie par une récurrence simple que la dérivée k-ième de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\lambda}$ est $\boxed{t \mapsto \dfrac{(-1)^k k!}{(t+\lambda)^{k+1}}.}$

b) On trouve $\boxed{\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{i/2}{t+i} - \dfrac{i/2}{t-i}}$ après calcul.

Pour dériver k fois arctan, il suffit de dériver $k-1$ fois sa dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, en se servant de la formule de la question précédente :

$$\boxed{\arctan^{(k)}(t) = \frac{{}^{i}\!/_{2}(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t+i)^k} - \frac{{}^{i}\!/_{2}(-1)^{k-1}(k-1)!}{(t-i)^k}}$$

c) On part de $\arctan^{(k)}(t) = \dfrac{i}{2}(-1)^{k-1}(k-1)!\left(\dfrac{1}{(t+i)^k} - \dfrac{1}{(t-i)^k}\right)$ et on majore.

On a $\left|\dfrac{i}{2}(-1)^{k-1}(k-1)!\right| = \dfrac{(k-1)!}{2}$. D'autre part, pour tout t réel on a $|t \pm i| = \sqrt{t^2+1} \geqslant 1$ et donc $\left|\dfrac{1}{(t+i)^k} - \dfrac{1}{(t-i)^k}\right| \leqslant \dfrac{1}{|t+i|^k} + \dfrac{1}{|t-i|^k} \leqslant 2.$

Par conséquent $\left|\arctan^{(k)}(t)\right| \leqslant (k-1)!$ pour tout réel t.

En particulier, pour $k = 2n+2$ on trouve bien $\boxed{\left|\arctan^{(2n+2)}(t)\right| \leqslant (2n+1)!.}$

3. ***a)*** On majore l'intégrale par inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\int_0^x \frac{\arctan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^x \frac{\left|\arctan^{(2n+2)}(t)\right|}{(2n+1)!}|x-t|^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^x |x-t|^{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\left[\pm\frac{|x-t|^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]_{t=0}^{t=x}\right| \\
&= \boxed{\frac{|x|^{2n+2}}{2n+2}}
\end{aligned}$$

b) Lorsque $x \in [-1;1]$, le numérateur $|x|^{2n+2}$ est bornée. Par théorème d'encadrement on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \arctan(x)$.

On trouve bien $\boxed{\forall x \in [-1;1]\,,\ \arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.}$

Partie B

4. • Comme arctan est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\theta \geqslant \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} > 0$.

• La dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ de arctan est majorée par 1. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à arctan sur un intervalle $[0;x]$ (où $x \geqslant 0$), on trouve $\arctan x - \arctan 0 \leqslant 1(x-0)$. Donc $\underline{\arctan x \leqslant x}$ pour tout réel positif x.

Mais alors $\theta \leqslant 4\arctan\frac{1}{5} \leqslant 4 \times \frac{1}{5} < \pi$.

On a bien montré $\boxed{\theta \in \ ]0;\pi[\ .}$

5. Comme $\tan(a+b) = \frac{\tan a \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, on a $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Donc $\tan\left(2\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{2 \times {}^1\!/_5}{1 - {}^1\!/_{25}} = \frac{5}{12}$.

Puis $\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{2 \times {}^5\!/_{12}}{1 - ({}^5\!/_{12})^2} = \frac{120}{119}$.

6. On trouve $\tan\theta = \frac{{}^{120}\!/_{119} - {}^1\!/_{239}}{1 + {}^{120}\!/_{119} \times {}^1\!/_{239}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$.

Comme $\theta \in \ ]0;\pi[$, on en déduit $\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\boxed{\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}.}$

Partie C

7. ***a)*** Reprenons la majoration de la question ***3a*** : $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{2n+2}$.

Pour $x = 1$, on est sûr que $|R_N(1)| \leqslant \frac{1}{4}10^{-D}$ dès que $\frac{1}{2N+2} \leqslant \frac{1}{4}10^{-D}$, c'est-à-dire $N \geqslant 2 \times 10^D - 1$. Pour calculer une approximation de π avec la formule $\pi = 4\arctan(1)$ avec cent décimales exactes, on s'attend donc à devoir calculer une somme d'environ 2×10^{100} termes. Même en effectuant un milliard d'opérations par seconde, l'ordre de grandeur de la durée d'un tel calcul est très au delà de l'âge de l'univers.

La formule $\pi = 4\arctan(1) = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ n'est utilisable en pratique pour calculer un nombre non négligeable de décimales de π.

b) Lorsque $x \in \ ]0;1[$, la somme $S_n(x)$ va converger beaucoup plus vite vers $\arctan x$ que lorsque $x = 1$, grâce au terme $|x|^{2n+1}$.

En effet, dès que $N \geqslant D \times \frac{-\ln 10}{2\ln|x|} - 1$, on a $\frac{|x|^{2N+N}}{2N+2} \leqslant |x|^{2N+2} \leqslant 10^{-D}$ et donc $R_N(x) \leqslant 10^{-D}$.

(Remarquer la différence de complexité : $O(D)$ au lieu de $O(10^D)$.)

8. Dans la première boucle, `terme`, qui démarre à $\dfrac{16}{5} \times 10^D$, est divisé par $\dfrac{-1}{5^2}$ à chaque itération. `terme` vaut donc la partie entière de $16 \times \dfrac{(-1)^k}{5^{2k+1}} 10^D$ (c'est un invariant de boucle), et la première boucle ajoute à `pi_approx` la partie entière de $16 \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}} \times 10^D = 16 S_N(1/5) \times 10^D$.

On programme la deuxième boucle pour ajouter à `pi_approx` la quantité $-4 S_N(1/239) \times 10^D$.

```
def calcule_pi(D):

    pi_approx = 0

    terme = 16 * 10**D // 5
    k = 0
    while terme != 0:
        pi_approx += terme // (2*k+1)
        terme //= -25
        k += 1

    terme = -4 * 10**D // 239
    k = 0
    while terme != 0:
        pi_approx += terme // (2*k+1)
        terme //= -57121 # 57121 = 239 au carré
        k += 1

    return(pi_approx)
```

9. Plus n est grand, plus le calcul de $\arctan \dfrac{1}{n}$ est rapide.
Le facteur limitant est le plus petit n qui intervient dans la formule.
La formule la plus efficace est la **(D)**.
(Il serait possible de répondre plus sérieusement à cette question en calculant exactement le nombre de tours de boucles pour chacun de ces formules !)