DM20 – Corrigé

Exercice 1 – Règle de d'Alembert

1. ***a)*** Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang.
Donc (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

b) La suite (u_n) strictement positive et croissante à partir d'un certain rang ne peut pas tendre vers 0. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.

2. ***a)*** Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < K$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant K$ à partir d'un certain rang qu'on notera N.
On a donc $u_{n+1} \leqslant K u_n$ pour tout $n \geqslant N$. Par récurrence immédiate, $u_n \leqslant K^{n-N} u_N$ pour tout $n \geqslant N$. En posant $C = u_N K^{-N}$, on a la propriété demandée.

b) La série géométrique $\sum K^n$ est convergente ($K < 1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est donc convergente.

3. ***a)*** La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ convient, voire même la série grossièrement divergente $\sum 1$.

b) La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente avec $\ell = 1$.

4. Posons $u_n = \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{nx}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Donc : si $x > 1$, la série diverge et si $x < 1$, la série converge. Le réel $R = 1$ convient.

Exercice 2 – Règle de Raabe-Duhamel

1. Si $\alpha < 0$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\dfrac{\alpha}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $-\dfrac{\alpha}{n}$ est strictement positif, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \geqslant 0$ à partir d'un certain rang. Donc (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
Comme (u_n) est à termes strictement positifs, alors elle ne peut pas tendre vers 0 et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

2. Calculons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. ***a)*** On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{\beta-\alpha}{n}$. Or, $\dfrac{\beta-\alpha}{n}$ est strictement négatif.
Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif à partir d'un certain rang, ce qui donne le résultat.

b) On a donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ à partir d'un certain rang qu'on notera N.

Par conséquent la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang N.

Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant N$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_N}{v_N}$, ce qui donne bien $u_n \leqslant K v_n$ en posant $K = \dfrac{u_N}{v_N}$.

c) Comme $\sum v_n$ est convergente (série de Riemann de paramètre $\beta > 1$), la série $\sum u_n$ est convergente par comparaison de séries à termes positifs.

4. Choisissons un β dans l'intervalle $]\alpha;1[$ (Remarquons qu'alors la série $\sum v_n$ est une série de Riemann divergente).

• On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\beta-\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{\beta-\alpha}{n}$. Or, $\dfrac{\beta-\alpha}{n}$ est strictement positif.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est positif à partir d'un certain rang, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang qu'on notera N.

• Mais alors $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ à partir du rang N et la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est croissante à partir de N.

Par conséquent, pour tout $n \geqslant N$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{u_N}{v_N}$, ce qui donne $u_n \geqslant K v_n$ en posant $K = \dfrac{u_N}{v_N}$.

• On conclut par comparaison de séries à termes positifs : $\sum u_n$ est divergente.

5. • En posant $u_n = \dfrac{1}{n}$, la série $\sum u_n$ est divergente (série harmonique) et on a bien $\alpha = 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

• En posant $u_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$, la série $\sum u_n$ est convergente (c'est une série de Bertrand) et on a aussi $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \\
&= \frac{n}{n+1} \times \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^2 \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \times \left(\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+{}^1\!/_n\right)}\right)^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{1+\left({}^1\!/_n+o({}^1\!/_n)\right)/\ln n}\right)^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{-2} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \\
&= 1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

6. ***a)*** Donnons un développement de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à la précision $\dfrac{1}{n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a+n+1}{b+n+1} = \frac{1+{}^{(a+1)}\!/_n}{1+{}^{(b+1)}\!/_n} = \left(1+\frac{a+1}{n}\right)\left(1-\frac{b+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit par la règle de Raabe-Duhamel que la série $\sum u_n$ converge lorsque $b-a>1$ et diverge lorsque $b-a<1$.

Dans le cas ambigu où $b=a+1$, le terme u_n se simplifie en $u_n = \dfrac{a}{a+1+n}$ et $\sum u_n$ est divergente par comparaison avec la série harmonique.

Finalement : $\sum u_n$ converge si et seulement si $b > a+1$.

b) À nouveau, on calcule un développement asymptotique de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \sqrt{n+1}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right) \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \left(\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \left(\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n\sqrt{n}}\right)^3+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{2}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{6n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{6}<1$, la règle de Raabe-Duhamel implique que la série $\sum v_n$ est divergente.

Exercice 3 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ usuel, notons

$$u=(1,2,\,\dots,n) \text{ et } v=\left(\sqrt{1},\sqrt{2},\,\dots,\sqrt{n}\right)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\times\|v\|$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{k}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n}k}=\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\times\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$$

2. On munit $E=\mathcal{C}^0([0;1])$ du produit scalaire habituel : $\langle f,h\rangle=\displaystyle\int_0^1 fg$ pour $f,\,g\in E$.
Soient n et p dans $\mathbb{N}$, et $f\in E$ positive.
Définissons les fonctions continues sur $[0;1]$ suivantes : $u:t\mapsto t^n\sqrt{f(t)}$ et $v:t\mapsto t^p\sqrt{f(t)}$.
Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\times\|v\|$ donne :

$$\left|\int_0^1 t^{n+p}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{\int_0^1 t^{2n}f(t)\,\mathrm{d}t}\times\sqrt{\int_0^1 t^{2p}f(t)\,\mathrm{d}t}$$

En élevant au carré il vient $I_{n+p}^2\leqslant I_{2n}I_{2p}$.

3. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}({}^tA\,B)$.
Soient A et B symétriques. Alors

$$\mathrm{tr}(AB+BA)=\mathrm{tr}({}^tA\,B)+\mathrm{tr}({}^tB\,A)=\langle A,B\rangle+\langle B,A\rangle=2\langle A,B\rangle$$

De plus $\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}({}^tA\,A)=\langle A,A\rangle=\|A\|^2$ et, de même, $\mathrm{tr}(B^2)=\|B\|^2$.
L'inégalité demandée n'est autre que $(2\langle A,B\rangle)^2\leqslant 4\|A\|^2\|B\|^2$, c'est-à-dire l'inégalité de Cauchy-Schwarz au carrée et multipliée par 4.