DM21 – Corrigé

Exercice 1 – Adjoint

1. Supposons que f admette deux adjoints g_1 et g_2. Soit $y \in E$. On a, pour tout vecteur x de E, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g_1(y) \rangle = \langle x, g_2(y) \rangle$ donc $\langle x, g_1(y) - g_2(y) \rangle = 0$. En choisissant $x = g_1(y) - g_2(y)$, comme le produit scalaire est défini on obtient $g_1(y) - g_2(y) = 0_E$.

On a montré $g_1(y) = g_2(y)$ pour tout $y \in E$, c'est-à-dire $g_1 = g_2$.

2. • Soit $x \in \operatorname{Im} f^*$. Alors x s'écrit $x = f^*(u)$ avec $u \in E$. On veut montrer que x appartient à $(\ker f)^\perp$, c'est-à-dire que x est orthogonal à tout vecteur de $\ker f$. Soit $y \in \ker f$.

Alors on a $\langle x, y \rangle = \langle f^*(u), y \rangle = \langle u, f(y) \rangle = \langle u, 0_E \rangle = 0$.

Donc $x \perp y$ et on a le résultat voulu.

• Soit $x \in \ker f^*$. On veut montrer que x appartient à $(\operatorname{Im} f)^\perp$, c'est-à-dire que x est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} f$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il peut s'écrire $y = f(u)$ avec $u \in E$.

Alors on a $\langle x, y\rangle = \langle x, f(u) \rangle = \langle f^*(x), u \rangle = \langle 0_E, u \rangle = 0$.

Donc $x \perp y$ et on a le résultat voulu.

3. Notons $n = \dim E$. Comme E est un espace euclidien, $\ker f$ et $(\ker f)^\perp$ sont des sev supplémentaires orthogonaux. Par conséquent on a $\dim(\ker f)^\perp = n - \dim \ker f$. On a de même $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = n - \dim \operatorname{Im} f$.

Les inclusions $\operatorname{Im} f^* \subset (\ker f)^\perp$ et $\ker f^* \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$ de la question précédente donnent les inégalités de dimensions suivantes :

$$\dim \operatorname{Im} f^* \leqslant \dim (\ker f)^\perp \text{ et } \dim \ker f^* \leqslant \dim (\operatorname{Im} f)^\perp \quad (A)$$

$$\text{donc } \dim \operatorname{Im} f^* \leqslant n - \dim \ker f \text{ et } \dim \ker f^* \leqslant n - \dim \operatorname{Im} f$$

Par somme il vient : $\dim \operatorname{Im} f^* + \dim \ker f^* \leqslant 2n - \dim \ker f - \dim \operatorname{Im} f \quad (B)$

Mais d'après le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Im} f^* + \dim \ker f^* = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n$ et l'inégalité (B) est en fait une égalité. Il s'ensuit que les inégalités (A) sont toutes les deux des égalités.

On en déduit que les deux inclusions de sev sont en fait des égalités : $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$ et $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$. Enfin, $\operatorname{rg} f^* = \dim \operatorname{Im} f^* = \dim (\ker f)^\perp = n - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.

4. • Pour tous x, $y \in E$ on a :

$$\langle (u+v)(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle v(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle + \langle x, v^*(y) \rangle = \langle x, (u^* + v^*)(y) \rangle$$

Donc $u + v$ a bien un adjoint, il est égal à : $(u+v)^* = u^* + v^*$.

• Pour tous x, $y \in E$ on a :

$$\langle u \circ v(x), y \rangle = \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle = \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle = \langle x, (v^* \circ u^*)(y) \rangle$$

Donc $u \circ v$ a bien un adjoint, il est égal à : $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

• Pour tous x, $y \in E$ on a :

$$\langle \lambda u(x), y \rangle = \lambda \langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \lambda u^*(y) \rangle$$

Donc λu a bien un adjoint, il est égal à : $(\lambda u)^* = \lambda u^*$.

• Pour tous x, $y \in E$ on a : $\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

Donc u^* a bien un adjoint, il est égal à : $(u^*)^* = u$.

• Pour tous x, $y \in E$ on a : $\langle \mathrm{Id}_E(x), y \rangle = \langle x, \mathrm{Id}_E(y) \rangle$

Donc Id_E a bien un adjoint, il est égal à : $\mathrm{Id}_E^* = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 2 – Déterminant de Gram

1. ***a)*** $G(u) = \|u\|^2$.

b) $G(u,v) = \begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{vmatrix} = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u,v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$ et donc $G(u,v) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si (u,v) est une famille liée.

c) • Pour tout $i \in [\![2;p]\!]$ on a $\langle u_1,u_i\rangle = 0$, le déterminant de Gram est donc de la forme :

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \left|\begin{array}{c:ccc} \|u_1\|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & M(u_2, \ldots, u_p) & \\ 0 & & & \end{array}\right|$$

Par développement par rapport à la première colonne, on obtient bien

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \|u_1\|^2\, G(u_2, \ldots, u_p)$$

• Si la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est orthogonale, on peut faire sortir un à un les vecteurs :

$$\begin{aligned} G(u_1, u_2, \ldots, u_p) &= \|u_1\|^2\, G(u_2, \ldots, u_p) \\ &= \|u_1\|^2\|u_2\|^2\, G(u_3, \ldots, u_p) \\ &= \ldots \\ &= \|u_1\|^2\|u_2\|^2 \ldots \|u_p\|^2 \end{aligned}$$

On peut aussi plus simplement remarquer que la matrice de Gram est diagonale, et calculer directement son déterminant :

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \begin{vmatrix} \|u_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|u_p\|^2 \end{vmatrix}_{[p]} = \prod_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$$

2. ***a)*** En transposant deux vecteurs de la famille $(u_1, \ldots u_p)$ (opération $u_i \leftrightarrow u_j$), on effectue sur la matrice de Gram $M(u_1, \ldots u_p)$ les deux opérations de transposition $C_i \leftrightarrow C_j$ et $L_i \leftrightarrow L_j$, ce qui laisse son déterminant invariant.

b) En effectuant la transvection $u_1 \leftarrow u_1 + \lambda u_j$ ($j \in [\![2;p]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$), on effectue sur la matrice de Gram $M(u_1, \ldots u_p)$ les deux opérations de transvection $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_j$ et $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_j$, ce qui laisse son déterminant invariant.

▷ Finalement, après ces deux questions, on sait qu'on peut effectuer sur une famille de vecteurs des opérations de transposition et de transvection (mais pas de dilatations) quelconques sans modifier son déterminant de Gram.

c) Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est liée, alors l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres vecteurs. Quitte à transposer deux éléments de la famille, on peut supposer que c'est u_1 qui s'écrit $u_1 = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$.

$$\begin{aligned} \text{Mais alors } G(u_1, u_2, \ldots, u_p) &= G\left(u_1 - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i,\, u_2, \ldots, u_p\right) \\ &= G(0, u_2, \ldots, u_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) Les vecteurs de la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ orthogonalisée de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ par le procédé de Schmidt vérifient les relations :

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle\, u_k\,, v_i \,\rangle}{\langle\, v_i\,, v_i \,\rangle} v_i \quad \text{pour tout } k \in [\![1;p]\!]$$

Par conséquent, en partant de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et en remplaçant successivement u_1 par v_1, puis u_2 par v_2, ..., jusqu'à u_p par v_p, on n'effectue que des transvections et on laisse le déterminant de Gram invariant :

$$\begin{array}{rcl} G(u_1, u_2, \ldots, u_p) & = & G(v_1, u_2, \ldots, u_p) \\ & = & G(v_1, v_2, \ldots, u_p) \\ & = & \ldots \\ & = & G(v_1, v_2, \ldots, v_p) \end{array}$$

e) On a déjà vu que $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ liée implique $G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$.
D'autre part, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre, alors sa famille orthogonalisée $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est libre également et ne contient donc pas le vecteur nul. On a donc

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_p) = G(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \prod_{k=1}^{p} \|v_k\|^2 > 0$$

3. • Comme x_F est le projeté orthogonal de x sur F, on a $x - x_F \in F^{\perp}$.
Donc $x - x_F \perp u_i$ pour tout $i \in [\![1;p]\!]$. D'après la question ***1c*** on en déduit

$$G(x - x_F, u_1, u_2, \ldots, u_p) = \|x - x_F\|^2 \, G(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

• Comme $x_F \in F$ et comme $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de F, le vecteur x_F peut s'écrire $x_F = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$. Le déterminant de Gram étant invariant par transvections, on a alors

$$\begin{array}{rcl} G(x - x_F, u_1, u_2, \ldots, u_p) & = & G\left(x - \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k,\ u_1, u_2, \ldots, u_p\right) \\ & = & G(x, u_1, u_2, \ldots, u_p) \end{array}$$

• Enfin, on sait que $\|x - x_F\| = d(x,F)$. On obtient bien finalement :

$$d(x,F)^2 = \frac{G(x, u_1, u_2, \ldots, u_p)}{G(u_1, u_2, \ldots, u_p)}$$