DS2 – Éléments de correction

Exercice 1 – Logique et raisonnement

1. • Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $a = 0$ et $b = \sin x$. Alors on a bien $\sin x = ax + b$ et a et b conviennent. Ce qui démontre (A).

• Le nombre $x = 4$ vérifie bien ($x \leqslant 0$ ET $x > 1$) OU $x = 4$, donc (B) est démontré.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $e^x = x - 1$. Alors $x = 1 + e^x > 1$. On a démontré (C).

2. NON (A) : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin x \neq ax + b}$

NON (B) : $\boxed{\forall x \in [4;5]\,, (x > 0 \text{ OU } x \leqslant 1) \text{ ET } x \neq 4}$

NON (C) : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, (e^x = x - 1 \text{ ET } x \leqslant 1)}$

Exercice 2 – Racines de l'unité

1. ***a)*** On reconnaît une somme géométrique, comme $\omega \neq 1$ on a $S = \dfrac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$ donc $\boxed{S = 0}$

b) Calculons $(1 - \omega)T$:

$$\begin{aligned}
(1-\omega)T &= (1-\omega)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^{k+1} && \text{en développant} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k && \text{par décalage d'indice} \\
&= \omega^0 + \sum_{k=1}^{n-1}\omega^k - n\omega^n && \text{en regroupant les deux sommes}
\end{aligned}$$

Donc $(1 - \omega)T = S - n\omega^n = -n$ et on conclut : $\boxed{T = \dfrac{n}{\omega - 1}.}$

2. Calculons (on peut commencer par remarquer que $\dfrac{1}{1+j} = \dfrac{1}{-j^2} = -j$) :

$$(1-j)(3-4j) + \frac{2+j}{1+j} = 3 - 7j + 4j^2 - j(2+j) = 3 - 9j + 3j^2 = 3 - 9j + 3(-1-j) = \boxed{-12j}$$

Exercice 3 – Trigonométrie

1. On cherche à calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arccos t \,\mathrm{d}t$, pour $x \in [-1; 1]$.

Effectuons une intégration par parties, en dérivant $\arccos t$ et en primitivant 1 :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \arccos t \,\mathrm{d}t \\
&= [t \arccos t]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x \arccos x - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x \\
&= \boxed{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}} + 1
\end{aligned}$$

2. Notons $A = \arctan\dfrac{4}{3}$ et $B = 2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Encadrons ces deux nombres puis calculons leur sinus.

• Comme $\dfrac{4}{3} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant A \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ par croissance de arctan.

Comme $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a $0 \leqslant \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$ par croissance de arcsin, donc $0 \leqslant B \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

• On retrouve la formule de l'exercice 3.1 : $\sin\arctan x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Alors $\sin A = \dfrac{4/3}{\sqrt{1+(4/3)^2}} = \dfrac{4}{5}$.

• On a par formule de duplication : $\sin B = 2\sin\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Comme $0 \leqslant \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, le terme $\cos\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ est positif et on a donc

$\cos\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Finalement il vient $B = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$.

On peut conclure : comme A et B ont même sinus et appartiennent à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, et comme sin est bijective de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;1]$, on a bien $\boxed{A = B.}$

3. On peut par exemple étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arcsin(\operatorname{th} x) - \arctan(\operatorname{sh} x)$ pour tout réel x.
(Notons que $\operatorname{th} x \in \,]-1;1[$, donc f est bien définie (et même dérivable) sur $\mathbb{R}$.)
Calculons la dérivée de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{1/\operatorname{ch}^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} - \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1/\operatorname{ch}^2 x}{\sqrt{1/\operatorname{ch}^2 x}} - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = 0$$

Donc f est constante. On remarque que $f(0) = 0$ et on peut conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arcsin(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh} x)}$$

Exercice 4 – Équations différentielles

1. Résolvons $(E)\ :\ (1+x^2)y' - y = 1$.
Comme $1 + x^2$ ne s'annule jamais, on peut réécrire cette équation $y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
L'équation homogène associée, $(E_0)\ :\ y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = 0$, a pour solutions les

$$y : x \mapsto \lambda e^{\arctan x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on pourrait utiliser la méthode de variation de la constante, mais il y a plus simplement une solution évidente : $y_P : x \mapsto 1$. Finalement, les solutions de (E) sont les

$$\boxed{y : x \mapsto 1 + \lambda e^{\arctan x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

On cherche pour finir λ tel que $1 + \lambda e^{\arctan\sqrt{3}} = 0$. On trouve $\lambda = -e^{-\pi/3}$. Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy posé par l'énoncé est :

$$\boxed{y : x \mapsto 1 - e^{-\pi/3 + \arctan x}}$$

2. On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 : $(E)\ :\ y'' - 2y' + y = 2\operatorname{ch} x$.

L'équation homogène associée, $(E_0)\ :\ y'' - 2y' + y = 0$, a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, de racine double $r_0 = 1$.
Les solutions de (E_0) sont donc les $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$, où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Pour trouver une solution particulière de $(E)\ :\ y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}$, on peut commencer par chercher des solutions particulières de

$$(E_1)\ :\ y'' - 2y' + y = e^x \quad \text{et } (E_2)\ :\ y'' - 2y' + y = e^{-x}$$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_{P_1}\ :\ x \mapsto Q(x)e^x$, où $Q(x)$ est polynomial de degré 2. Après calcul, $y_{P_1} : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2e^x$ convient.
Pour (E_2), une solution particulière est $y_{P_2} : x \mapsto \dfrac{1}{4}e^{-x}$ convient.
Finalement, $y_{P_1} + y_{P_2}$ est solution particulière de (E) et les solutions de (E) sont les

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + (\lambda x + \mu)e^x, \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

3. ***a)*** Si on a $z = xy' + y$, alors $z' = xy'' + 2y'$, ce qui donne $x^3y'' = x^2z' - 2x^2y'$.
Alors, en substituant, $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$ si et seulement si $x^2z' - 2x^2y' - 2xy + 3 = 0$, si et seulement si $x^2z' - 2xz + 3 = 0$.
Comme on travaille sur un intervalle où x ne s'annule pas, on en déduit :

$$\boxed{x^3y'' - 2xy + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z' - \frac{2}{x}z = -\frac{3}{x^2}}$$

b) On résout l'équation $(E)\ :\ z' - \dfrac{2}{x}z = -\dfrac{3}{x^2}$.
L'équation homogène associée $z' - \dfrac{2}{x}z = 0$ a pour solutions les $z : x \mapsto \lambda e^{2\ln|x|} = \lambda x^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de (E) est $z_P : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (évidente, ou alors on utilise la méthode de variation de la constante). Finalement, les z solutions de (E) sont les

$$\boxed{z : x \mapsto \frac{1}{x} + \lambda x^2, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

c) Pour trouver les solution y, il ne reste plus qu'à résoudre $xy' + y = \dfrac{1}{x} + \lambda x^2$, ou encore $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2} + \lambda x$, le nombre x ne s'annulant pas.
L'équation homogène associée $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ a pour solutions les $y : x \mapsto \dfrac{\mu}{x}$, où $\mu \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière y_P de l'équation avec second membre en utilisant la méthode de variation de la constante, sous la forme $y_P : x \mapsto \dfrac{\mu(x)}{x}$.
En substituant, il vient

$$\frac{\mu'(x)}{x} - \frac{\mu(x)}{x^2} + \frac{\mu(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \lambda x, \text{ donc } \mu'(x) = \frac{1}{x} + \lambda x^2$$

On peut prendre $\mu(x) = \ln x + \lambda\dfrac{x^3}{3}$ et on obtient $y_P(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \lambda\dfrac{x^2}{3}$.
Finalement, on peut donner les solutions de $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$, en reparamétrant :

$$\boxed{y : x \mapsto \frac{\ln x}{x} + \lambda x^2 + \frac{\mu}{x}, \text{ avec } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

4. ***a)*** Comme arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, z est dérivable comme composée de fonctions dérivables. De plus, en dérivant $y(x) = z(\sin x)$, on obtient $y'(x) = \cos(x)z'(\sin x)$ puis $y''(x) = \cos^2(x)z''(\sin x) - \sin(x)z'(\sin x)$.

Alors, en substituant, on a $\cos(x)y''(x)+\sin(x)y'(x)-\cos^3(x)y(x) = 0$ pour $x \in I_0$ si et seulement si $\cos(x)(\cos^2(x)z''(\sin x)-\sin(x)z'(\sin x))+\sin(x)\cos(x)z'(\sin x)-\cos^3(x)z(\sin x) = 0$, ce qui donne après simplification $\cos^3(x)z''(\sin x) - \cos^3(x)z(\sin x) = 0$.

Comme $\cos x \neq 0$ sur I_0, cette dernière équation équivaut à $z''(\sin x) - z(\sin x) = 0$ pour $x \in I_0$, ou encore $\boxed{z'' - z = 0}$ sur $]-1;1[$.

b) Les solutions z à l'équation $z'' - z = 0$ sont les $z : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit les solutions de (E) sur I_0, ce sont les

$$\boxed{y : x \mapsto \lambda e^{\sin x} + \mu e^{-\sin x}, \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

c) Pour éviter de tout refaire, on peut exploiter la 2π-périodicité des fonctions trigonométriques, en remarquant que y est solution de (E) sur I_k si et seulement si la fonction $x \mapsto y(x-k\pi)$ est solution de (E) sur I_0.

Finalement, les solutions de (E) sur I_k sont aussi de la forme

$$\boxed{y : x \mapsto \lambda e^{\sin x} + \mu e^{-\sin x}, \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$$

d) On nous demande de résoudre un problème de raccord. Une éventuelle solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ doit être de la forme :

$$y : x \mapsto \begin{cases} \lambda_k e^{\sin x} + \mu_k e^{-\sin x} & \text{sur } I_k \\ \alpha_k & \text{en } k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

et on cherche les λ_k, μ_k et α_k pour faire de y une fonction continue et dérivable en chacun des points $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

• Continuité en $k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$:

— On a $y\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \alpha_k$

— D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to k\pi + \pi/2^+} y(x) = \lambda_k + \mu_k$ et $\displaystyle\lim_{x \to k\pi+\pi/2^-} y(x) = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1}$.

Donc y est continue en $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $\alpha_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1} = \lambda_k + \mu_k$.

• Dérivabilité en $k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$:

— On a

$$\lim_{x \to k\pi+\pi/2^+} \frac{y(x) - y(k\pi + \pi/2)}{x - (k\pi + \pi/2)} = \lim_{x \to k\pi+\pi/2^+} \left(\lambda_k \frac{e^{\sin x} - e^{\sin(k\pi+\pi/2)}}{x - (k\pi + \pi/2)} + \mu_k \frac{e^{-\sin x} - e^{-\sin(k\pi+\pi/2)}}{x - (k\pi + \pi/2)} \right)$$

$$= \lambda_k \cos(k\pi + \pi/2)\, e^{\sin(k\pi+\pi/2))} - \mu_k \cos(k\pi + \pi/2)\, e^{-\sin(k\pi+\pi/2))} = 0$$

— On trouve de même $\lim_{x \to k\pi+\pi/2^+} \dfrac{y(x) - y(k\pi + \pi/2)}{x - (k\pi + \pi/2)} = 0$.

Donc y est toujours dérivable en $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, on trouve bien des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (il y en a même beaucoup !).

Exercice 5 – Racines de solutions d'équations du second ordre

1. Les solutions de $(E_k) : y'' + ky = 0$ sont de la forme $\boxed{y : x \mapsto \lambda \cos\left(\sqrt{k}\, x + \varphi\right)}$, avec λ, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Une solution non nulle (c'est-à-dire vérifiant $\lambda \neq 0$ a pour racines les $x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$, il y en a une infinité et deux racines consécutives sont séparées de $\boxed{\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}.}$

2. ***a)*** Comme f et g sont solutions d'équations différentielles d'ordre 2, elles sont deux fois dérivables et W est dérivable comme différence de produits de fonctions dérivables. On obtient $W'(x) = f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) - f'(x)g'(x) - f''(x)g(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$. Comme $g''(x) = -q(x)g(x)$ et comme $f''(x) = -p(x)f(x)$, on peut simplifier en

$$\boxed{W'(x) = (p(x) - q(x))g(x)f(x)}$$

b) Raisonnons par l'absurde et supposons que f prenne une valeur positive en $x_0 \in \,]a;b[$ et négative en $x_1 \in \,]a;b[$. Alors, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f continue sur $[x_0;x_1]$, on montre l'existence d'une racine de f dans $]a;b[$, ce qui contredit l'hypothèse que a et b sont des racines consécutives.

On a donc bien $\boxed{f \text{ est de signe constant sur }]a;b[\,.}$

c) Raisonnons par l'absurde et supposons que $f'(a) = 0$.

Alors f est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + p(x)y = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = 0 \end{cases}$

Mais la fonction nulle est aussi solution de ce problème de Cauchy et, par unicité de la solution d'un tel problème, on doit avoir $f = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse f non nulle.

On montre de la même façon que $f'(b) \neq 0$ et on conclut $\boxed{f'(a) \neq 0 \text{ et } f'(b) \neq 0.}$

d) On exprime $f'(a)$ comme limite d'un taux d'accroissement. On peut même se limiter à une limite à droite : $f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Or, quand $x \to a^+$, x appartient à l'intervalle $]a;b[$ et $f(x) - f(a) = f(x) > 0$; d'autre part $x - a > 0$.

Donc $f'(a)$ est limite d'une quantité strictement positive et on en déduit $f'(a) \geqslant 0$.

Remarquons qu'en passant à la limite, on n'obtient qu'une inégalité large, mais la question précédente permet de conclure : $\boxed{f'(a) > 0.}$

De même , on écrit $f'(b) = \displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(b)}^{>0}}{\underbrace{x - b}_{<0}}$ et on en déduit $f'(b) \leqslant 0$.

À l'aide de la question précédente, on obtient $\boxed{f'(b) < 0.}$

e) Raisonnons par l'absurde et supposons que g ne s'annule pas sur $[a;b]$. Alors g est de signe constant sur $[a;b]$ (par le même argument qu'en ***2b***) et, quitte à remplacer g par $-g$, on peut supposer que g est strictement positive sur cet intervalle.

• On a vu que $W'(x) = (p(x) - q(x))g(x)f(x)$. Des hypothèses $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) \leqslant q(x)$ et f, g positives sur $[a;b]$, on déduit que W' est négative sur $[a;b]$.

Donc W est décroissante sur $[a;b]$.

• On a $W(a) = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) = -f'(a)g(a) < 0$.

• On a aussi $W(b) = f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = -f'(b)g(b) > 0$

Mais alors $W(a) < W(b)$, ce qui contredit la décroissance de W sur $[a;b]$.

Par conséquent on a bien : $\boxed{g \text{ s'annule au moins une fois sur }]a;b[\,.}$

3. ***a)*** Choisissons pour p la fonction constante égale à k.

Fixons un intervalle $\left[a; a+\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$ de longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\sqrt{k}(x-a)\right)$, c'est une solution de (E_p) qui s'annule en a et $a+\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Comme $p(x) \leqslant q(x)$, on peut appliquer le résultat de la question ***2*** : g admet au moins une racine sur $\left[a; a+\dfrac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$.

On a bien montré que $\boxed{g \text{ s'annule au moins une fois sur tout segment de longueur } \pi/\sqrt{k}\,.}$

b) On va appliquer le résultat de la question ***2*** en échangeant le rôle de p et q : si $q(x) \leqslant p(x)$ alors il y a toujours une racine de f entre deux racines de g.

Raisonnons par l'absurde et supposons que g s'annule en deux racines successives a et $a+\ell$, avec $0 < \ell < \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Posons $p(x) = k$ pour tout x et considérons $f : x \mapsto \sin\left(\sqrt{k}\left(x - a - \dfrac{\ell}{2}\right)\right)$

Alors f est solution de (E_p). Comme $q(x) \leqslant p(x)$, alors f doit s'annuler au moins une fois entre a et $a+\ell$. Mais ce n'est pas le cas : f est strictement positive sur $[a; a+\ell]$.

On a donc bien $\boxed{\begin{array}{c} g \text{ s'annule au plus une fois sur tout segment} \\ \text{de longueur strictement inférieure à } \pi/\sqrt{k}\,. \end{array}}$

4. ***a)*** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En dérivant on obtient $g'(x) = f'(x)\sqrt{x} + f(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, puis $g''(x) = f''(x)\sqrt{x} + f'(x)\dfrac{1}{\sqrt{x}} - f(x)\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.

En substituant et en simplifiant, f vérifie $x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - \alpha^2)f(x) = 0$ pour tout $x > 0$ si et seulement si $g''(x) + \left(1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2}\right) g(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

b) Comme $\sqrt{x}$ ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, f et g ont les mêmes racines.

- Si $\alpha \geqslant 1/2$, alors $1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2} \leqslant 1$.
- Si $\alpha \leqslant 1/2$, alors $1 - \dfrac{4\alpha^2 - 1}{4x^2} \geqslant 1$.

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question ***3*** pour conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \alpha \geqslant 1/2, \text{ alors } f \text{ s'annule au plus une fois sur tout segment de longueur } \pi. \\ \text{Si } \alpha \leqslant 1/2, \text{ alors } f \text{ s'annule au moins une fois sur tout segment de} \\ \text{longueur strictement inférieure à } \pi. \end{array}}$$

Remarque :

Les solutions de l'équation de Bessel sont appelées *fonctions de Bessel*.

Ce sont des fonctions spéciales, qui ne peuvent pas être exprimées à l'aide des fonctions usuelles, et qui apparaissent parfois dans certains problèmes de physique avancés.

Exercice 6 – Calcul de $\cos\dfrac{\pi}{17}$

1. Le calcul est plus agréable en passant par les complexes. On calcule $C_n(a,h)+iS_n(a,h)$:

$$\begin{aligned} C_n(a,h)+iS_n(a,h) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} \\ &= e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ih}\right)^k \end{aligned}$$

<u>Premier cas</u> : si $e^{ih}=1$, c'est à dire si $h\equiv 0\ [2\pi]$, alors $C_n(a,h)+iS_n(a,h)=ne^{ia}$ et

$$\boxed{C_n(a,h)=n\cos a \quad \text{et } S_n(a,h)=n\sin a}$$

<u>Deuxième cas</u> : si $h\not\equiv 0\ [2\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned} C_n(a,h)+iS_n(a,h) &= e^{ia}\frac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}} \\ &= e^{ia}\times\frac{e^{inh/2}}{e^{ih/2}}\times\frac{e^{-inh/2}-e^{inh/2}}{e^{-ih/2}-e^{ih/2}} \quad \text{(angle moitié)} \\ &= e^{i(a+(n-1)h/2)}\frac{\sin nh/2}{\sin h/2} \end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et imaginaire il vient

$$\boxed{C_n(a,h)=\cos\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(a,h)=\sin\left(a+\frac{(n-1)h}{2}\right)\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}}$$

2. Comme 3θ, 5θ et 7θ appartiennent à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, parmi les quatre cosinus qui apparaissent dans la somme x_1, seul $\cos\frac{11\pi}{17}$ est négatif.
mais $\cos\frac{11\pi}{17}=-\cos\frac{6\pi}{17}$ et $\cos\frac{6\pi}{17}<\cos\frac{5\pi}{17}$, donc $\cos(5\theta)+\cos(11\theta)>0$.
On a donc bien $\boxed{x_1>0.}$

3. On constate que $x_1+x_2=C_8(\theta,2\theta)$.
D'après la question ***1*** on a donc $x_1+x_2=\dfrac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin\theta}=\dfrac{\sin(16\theta)}{2\sin\theta}=\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{2\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{2\sin\theta}$ et on aboutit à $\boxed{x_1+x_2=\frac{1}{2}.}$

4. On a $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$.
En développant x_1x_2 il vient

$$\begin{aligned} x_1x_2 = {} & \cos(3\theta)\cos(\theta) + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(5\theta)\cos(\theta) + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(7\theta)\cos(\theta) + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) \\ & + \cos(11\theta)\cos(\theta) + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta) \end{aligned}$$

On linéarise tout (!) et on voit que $2x_1x_2$ est la somme de 32 termes de la forme $\cos(k\theta)$, avec :

$$k=4{,}2{,}12{,}6{,}16{,}10{,}18{,}12{,}6{,}4{,}14{,}4{,}18{,}8{,}20{,}10{,}8{,}6{,}16{,}2{,}20{,}6{,}22{,}8{,}12{,}10{,}20{,}2{,}24{,}2{,}26{,}4$$

On utilise le fait que $\cos(26\theta) = \cos((26-2\times 17)\theta) = \cos(8\theta)$, que $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$, $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$, $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$ et $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$.
Il vient $x_1x_2 = 2(\cos(2\theta)+\cos(4\theta)+\cos(6\theta)+\cos(8\theta)+\cos(10\theta)+\cos(12\theta)+\cos(14\theta)+\cos(16\theta))$.

Autrement dit, $x_1x_2 = 2C_8(2\theta,2\theta) = 2\dfrac{\sin(8\theta)\cos(\overbrace{9\theta}^{=\pi/2-8\theta})}{\sin\theta} = -2\dfrac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin\theta} = -2(x_1+x_2)$.
Et on trouve bien $\boxed{x_1x_2 = -1.}$

5. On connaît la somme et le produit des nombres x_1 et x_2. Ils sont alors solutions de l'équation $x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0$, et x_1 est la racine positive.
On trouve $\boxed{x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad x_1 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}.}$

6. Par une méthode analogue à la question précédente, on trouve après simplification

$$\boxed{y_1y_2 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad y_3y_4 = -\frac{1}{4}.}$$

7. Les nombres y_1 et y_2 ont pour somme x_1 et pour produit $-\dfrac{1}{4}$, ils sont donc solutions de l'équation $x^2 - x_1x - \dfrac{1}{4} = 0$. Comme y_2 est somme de deux cosinus négatifs, y_1 est la racine positive et on trouve $\boxed{y_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \quad \text{et} \quad y_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}.}$
De façon analogue : $\boxed{y_3 = \dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \quad \text{et} \quad y_4 = \dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}.}$

8. On trouve $\cos(\theta)\cos(13\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos(14\theta)+\cos(12\theta)) = \dfrac{1}{2}(-\cos(5\theta)-\cos(3\theta)) = \boxed{-\dfrac{y_1}{2}.}$

9. On connaît la somme et le produit de $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$, on peut donc les calculer en résolvant l'équation du second degré $x^2 - y_3x - \dfrac{y_1}{2} = 0$, $\cos(\theta)$ étant le solution positive.

Remarque culturelle : Le résultat de cet exercice n'est pas complètement gratuit, il a un rapport avec la construction à la règle et au compas d'un polygone régulier à 17 côtés (un heptadécagone).

À partir de segments de longueurs a, b et 1, il est possible de construire à la règle et au compas des segments de longueur $a+b$, $a-b$, ab, a/b et $\sqrt{ab}$ en utilisant astucieusement les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

Comme on a pu exprimer $\cos\pi/17$ en utilisant uniquement les opérations $+$, $-$, $\times$, $/$ et $\sqrt{\cdot}$ (et on pourrait faire de même pour $\cos 2\pi/17$ et $\sin 2\pi/17$), on peut construire en utilisant seulement la règle, le compas et un peu de persévérance le point de coordonnées $(\cos 2\pi/17; \sin 2\pi/17)$ et donc de fil en aiguille un heptadécagone régulier. Ce résultat a été démontré par ♡Carl Friedrich Gauss♡ à l'âge de 19 ans. À 24 ans, il a publié la généralisation suivante :

Théorème : Soit p un nombre premier impair. Alors on peut construire à la règle et au compas un polygone régulier à p côtés si et seulement si p est de la forme $p = 2^{2^k}+1$, où $k \in \mathbb{N}$.

Les nombres premiers de la forme $2^{2^k}+1$ sont appelés *nombres de Fermat*. Les premiers d'entre eux sont 3, 5, 17, 257 et 65537, et on soupçonne qu'il n'y en a pas d'autre (mais c'est une question encore ouverte). On peut donc construire un triangle, un pentagone... mais pas un heptagone, par exemple.

Pour une tentative de construction concrète de l'heptadécagone, on peut voir `https://www.youtube.com/watch?v=87uo2TPrsl8` puis `https://www.youtube.com/watch?v=oYlB5lUGlbw` (en anglais).