DS 3 – Éléments de correction

Exercice 1 – Applications, relations et compagnie

1. ***a)*** • Réflexivité : Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On a bien $pq = pq$, donc $(p,q) \sim (p,q)$.

• Symétrie : Soient (p,q) et $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Supposons $(p,q) \sim (p',q')$, c'est-à-dire $pq' = p'q$. On a alors $p'q = pq'$ et donc $(p',q') \sim (p,q)$.

• Transitivité : Soient (p,q), (p',q') et (p'',q'') trois éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On suppose que $(p,q) \sim (p',q')$ et $(p',q') \sim (p''',q''')$, c'est-à-dire que $pq' = p'q$ et $p'q'' = p''q'$.

Alors $pq'' = \dfrac{p'q}{q'} \times \dfrac{p''q'}{p'} = qp''$ (remarquons que q' et p' sont non nuls...).

On a donc bien $(p,q) \sim (p'',q'')$.

b) Un élément (p,q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ appartient à la classe de $(0,1)$ si et seulement si $(p,q) \sim (0,1)$, ce qui équivaut à $p = 0$.

Donc la classe de $(0,1)$ vaut $\mathrm{Cl}_\sim(\,(0,1)\,) = \{\ (0,q) \ \mid q \in \mathbb{N}^*\} = \{0\} \times \mathbb{N}^*$.

2. ***a)*** • Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a bien $f(x) - f(x) \geqslant |x - x|$ donc $x \ll x$.

• Transitivité : Soient x, y et z trois réels. On suppose que $x \ll y$ et $y \ll z$, c'est-à-dire $f(y) - f(x) \geqslant |y - x|$ et $f(z) - f(y) \geqslant |z - y|$. Utilisons l'inégalité triangulaire : on a $|z - x| = |(z - y) + (y - x)| \leqslant |z - y| + |y - x| \leqslant f(z) - f(y) + f(y) - f(x)$.

On aboutit bien à $f(z) - f(x) \geqslant |z - x|$ et donc $x \ll z$.

• Antisymétrie : Soient x et y deux réels. On suppose que $x \ll y$ et $y \ll x$, c'est-à-dire que $f(y) - f(x) \geqslant |y - x|$ et $f(x) - f(y) \geqslant |x - y|$.

Or l'un des deux nombres $f(y) - f(x)$ et $f(x) - f(y)$ est négatif ou nul. Donc le nombre positif $|y - x| = |x - y|$ doit être nul. Donc $x = y$.

b) Supposons $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$. Soient x, $y \in \mathbb{R}$.

Alors $x \ll y$ si et seulement si $y - x \geqslant |y - x|$, ssi $y - x \geqslant 0$, ssi $x \leqslant y$.

En conclusion, dans le cas $f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$, la relation $\ll$ est simplement l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** Le sens $\boxed{\Leftarrow}$ est évident, l'application identité étant injective. Montrons le sens $\boxed{\Rightarrow}$.

Supposons p injective. Soit $x \in E$. Comme $p \circ p = p$, on a $p(p(x)) = p(x)$. Par injectivité de p, on en déduit que $p(x) = x$. On a bien montré que $p = \mathrm{Id}_E$.

b) Le sens $\boxed{\Leftarrow}$ est évident, l'application identité étant surjective. Montrons le sens $\boxed{\Rightarrow}$.

Supposons p surjective. Soit x un élément de E. Comme p est surjective, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$. On a bien montré que $p = \mathrm{Id}_E$.

4. On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Alors x s'écrit $x = f(y)$ avec $y \in A \cap f^{-1}(B)$.

Comme $y \in A \cap f^{-1}(B)$, on a en particulier $y \in A$, donc $x = f(y) \in f(A)$.

On a d'autre part $y \in f^{-1}(B)$, donc $x = f(y) \in B$.

On a bien montré que $x \in f(A) \cap B$.

$\boxed{\supset}$ $x \in f(A) \cap B$.

Alors $x \in f(A)$, donc x peut s'écrire $x = f(y)$ avec $y \in A$.

De plus, $x \in B$, c'est-à-dire $f(y) \in B$, et on en déduit $y \in f^{-1}(B)$.

Finalement, on a $y \in A \cap f^{-1}(B)$ et donc $x = f(y) \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

Exercice 2 – Calculs dans un groupe

1. On calcule en partant de b^3a et en utilisant $ba = ab^3$ pour déplacer le a vers la droite : $b^3a = b^2ab^3 = bab^6 = ab^9$. On utilise pour finir $b^9 = b^2$. On a bien $b^3a = ab^2$.

2. On procède par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(G,\cdot\,)$ abélien. Montrons que φ est un morphisme. Soient x, $y \in G$. Alors $\varphi(xy) = (xy)^2 = xyxy = x^2y^2$ par commutativité de $\cdot$. On a donc bien $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que φ est un morphisme et démontrons que le groupe est abélien. Soient x et y dans G. Comme φ est un morphisme, on a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, ce qui équivaut à $(xy)^2 = x^2y^2$ ou $xyxy = xxyy$. En multipliant à gauche par x^{-1} et à droite par y^{-1}, il vient $yx = xy$, ce qu'il fallait démontrer.

3. ***a)*** Par définition de $Z(G)$, $\boxed{(G,\cdot\,) \text{ est abélien } \Leftrightarrow\ Z(G) = G.}$

b) • $Z(G)$ contient e, donc est non vide.

• Soient x et y dans $Z(G)$, on veut montrer que $xy^{-1} \in Z(G)$. Pour cela, soit u un élément quelconque de G, on va montrer que $uxy^{-1} = xy^{-1}u$.

On part de $yu = uy$ (y étant un élément du centre), on multiplie à gauche et à droite par y^{-1} pour obtenir $uy^{-1} = y^{-1}u$. On multiplie à gauche par x et on obtient $xuy^{-1} = xy^{-1}u$. Comme $x \in Z(G)$, il vient finalement $uxy^{-1} = xy^{-1}u$ et donc $xy^{-1} \in Z(G)$.

Donc $Z(G)$ est bien un sous-groupe.

c) Soient x et y dans G vérifiant $xy = Z(G)$. On commence par écrire $xy = xy\,x^{-1}x$ et on utilise le fait que xy et x^{-1} commutent : $xy = xy\,x^{-1}x = x^{-1}xyx = yx$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Soient x, y et z dans G.

• Associativité de $\star$:

On a $(x \star y) \star z = (xu^{-1}y) \star z = (xu^{-1}y)u^{-1}z = xu^{-1}(yu^{-1}z) = xu^{-1}(y \star z) = x \star (y \star z)$.

• Élément neutre de $\star$:

On a $x \star u = xu^{-1}u = u$ et $u \star x = uu^{-1}x = x$ donc u est le neutre de $\star$.

• Existence de symétriques pour $\star$:

On a $x\star(ux^{-1}u) = xu^{-1}ux^{-1}u = u$ et $(ux^{-1}u)\star x = ux^{-1}uu^{-1}x = u$, donc $ux^{-1}u$ est symétrique de x pour la loi $\star$ (on se gardera bien de le noter x^{-1}, cette notation étant déjà prise pour le symétrique de x pour la loi $\cdot$!).

Exercice 3 – Dérivations dans un anneau

1. $[a,b] = 0$.

2. ***a)*** $[a,b] = -[b,a]$.

b) $[a,b+c] = a(b+c) - (b+c)a = ab + ac - ba - bc = [a,b] + [a,c]$.

c) On a d'abord $[a,[b,c]] = [a,bc-cb] = a(bc-cb) - (bc-cb)a = abc - acb - bca + cba$.

Par permutations circulaires des variables ($a \to b \to c \to a$), on obtient :

$$\begin{aligned}
[a,[b,c]] &= abc - acb - bca + cba\\
[b,[c,a]] &= bca - bac - cab + acb\\
[c,[a,b]] &= cab - cba - abc + bac
\end{aligned}$$

On additionne tout et on obtient bien $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$.

3. Remarquons que $d_a(x) = [a,x]$ pour tout $x \in A$.

$\boxed{(1)}$ Soient x, $y \in A$. On a $d_a(x+y) = [a,x+y] = [a,x] + [a,y] = d_a(x) + d_a(y)$ d'après ***2b***.

$\boxed{(2)}$ Soient x, $y \in A$. D'une part on a $d_a(xy) = [a,xy] = axy - xya$.

D'autre part, $xd_a(y) + d_a(x)y = x(ay - ya) + (ax - xa)y = xay - xya + axy - xay = axy - xya$.

On a bien l'égalité $d_a(xy) = xd_a(y) + d_a(x)y$.

Donc d_a est une dérivation.

4. On applique (1) avec $x = y = 0$, on trouve $\delta(0) = \delta(0) + \delta(0)$, d'où $\boxed{\delta(0) = 0.}$

On applique (2) avec $x = y = 1$, on trouve $\delta(1) = \delta(1) + \delta(1)$, d'où $\boxed{\delta(1) = 0.}$

5. ***a)*** En appliquant (1) avec $y = -x$, on trouve $\delta(0) = \delta(x) + \delta(-x)$, d'où $\boxed{\delta(-x) = -\delta(x).}$

b) On applique (2) avec $y = x^{-1}$, il vient $\delta(1) = x\delta(x^{-1}) + \delta(x)x^{-1}$.

D'où $x\delta(x^{-1}) = -\delta(x)x^{-1}$. On multiplie à gauche par x^{-1} et on obtient $\boxed{\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1}.}$

6. ***a)*** On démontre par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que

$$\begin{array}{rcl} \delta(x_1x_2\ldots x_n) & = & \delta(x_1)x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n \\ & + & x_1\delta(x_2)x_3\ldots x_{n-1}x_n \\ & + & \ldots \\ & + & x_1x_2x_3\ldots\delta(x_{n-1})x_n \\ & + & x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}\delta(x_n) \end{array}$$

Qu'on peut aussi écrire $\delta\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_1\ldots x_{i-1}\delta(x_i)x_{i+1}\ldots x_n$.

b) On trouve alors $\delta(x^n) = \delta(x)x^{n-1} + x\delta(x)x^{n-2} + x^2\delta(x)x^{n-3} + \ldots x^{n-1}\delta(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\delta(x)x^{n-k}$.

Si x et $\delta(x)$ commutent on a plus simplement $\delta(x^n) = n\delta(x)x^{n-1}$.

7. ***a)*** • Comme $\delta(0) = \delta(1) = 0$, on a $0,\, 1 \in C_\delta$.

• Soient $x,\, y \in C_\delta$. Alors $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) = 0 + 0 = 0$, donc $x + y \in C_\delta$.

• Soient $x,\, y \in C_\delta$. Alors $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y = 0 + 0 = 0$, donc $xy \in C_\delta$.

• Soit $x \in C_\delta$. Alors $\delta(-x) = -\delta(x) = 0$, donc $-x \in C_\delta$.

b) • Soit $x \in C_\delta \setminus \{0\}$. Alors $\delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta(x)x^{-1} = 0$, donc $x^{-1} \in C_\delta$.

8. ***a)*** Soient $x,\, y \in A$.

$\boxed{(1)}$ On a $(\delta_1 + \delta_2)(x + y) = \delta_1(x + y) + \delta_2(x + y) = \delta_1(x) + \delta_1(y) + \delta_2(x) + \delta_2(y)$ donc $(\delta_1 + \delta_2)(x + y) = (\delta_1 + \delta_2)(x) + (\delta_1 + \delta_2)(y)$.

$\boxed{(2)}$ On a $(\delta_1 + \delta_2)(xy) = \delta_1(xy) + \delta_2(xy) = x\delta_1(y) + \delta_1(x)y + x\delta_2(y) + \delta_2(x)y$.

On factorise : $(\delta_1 + \delta_2)(xy) = x(\delta_1(y) + \delta_2(y)) + (\delta_1(x) + \delta_2(x))y$.

Donc $(\delta_1 + \delta_2)(xy) = x(\delta_1 + \delta_2)(y) + (\delta_1 + \delta_2)(x)y$ et $\delta_1 + \delta_2$ est bien une dérivation.

b) La propriété (1) est vérifiée par $\delta_1 \circ \delta_2$ mais la propriété (2) ne l'est pas en général.

Pour $x,\, y \in A$ on a $\delta_1 \circ \delta_2(xy) = \delta_1(x\delta_2(y) + \delta_2(x)y)$

donc $\delta_1 \circ \delta_2(xy) = x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(x)\delta_2(y) + \delta_2(x)\delta_1(y) + \delta_1(\delta_2(x))y$

Cette expression ne vaut $x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(\delta_2(x))y$ que si $\delta_1(x)\delta_2(y) + \delta_2(x)\delta_1(y) = 0$.

On a donc besoin de $\delta_1 \circ \delta_2 + \delta_2 \circ \delta_1 = 0$ pour que $\delta_1 \circ \delta_2$ soit une dérivation, et ça n'est pas le cas en général.

c) Soient $x,\, y \in A$.

$\boxed{(1)}$ On a $[\delta_1,\delta_2](x+y) = \delta_1(\delta_2(x+y)) - \delta_2(\delta_1(x+y)) = \delta_1(\delta_2(x)+\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)+\delta_1(y))$ $= \delta_1(\delta_2(x)) + \delta_1(\delta_2(y)) - \delta_2(\delta_1(x)) - \delta_2(\delta_1(y)) = [\delta_1,\delta_2](x) + [\delta_1,\delta_2](y)$.

$\boxed{(2)}$ On a $[\delta_1,\delta_2](xy) = \delta_1(\delta_2(xy)) - \delta_2(\delta_1(xy))$

$$\begin{aligned} &= \delta_1(x\delta_2(y) + \delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y) + \delta_1(x)y) \\ &= x\delta_1(\delta_2(y)) + \delta_1(x)\delta_2(y) + \delta_1(\delta_2(x))y + \delta_2(x)\delta_1(y) \\ &\qquad -x\delta_2(\delta_1(y)) - \delta_2(x)\delta_1(y) - \delta_2(\delta_1(x))y - \delta_1(x)\delta_2(y) \\ &= x\delta_1(\delta_2(y)) - x\delta_2(\delta_1(y)) + \delta_1(\delta_2(x))y - \delta_2(\delta_1(x))y \\ &= x[\delta_1,\delta_2](y) + [\delta_1,\delta_2](x)y \end{aligned}$$

et on a bien montré que $[\delta_1,\delta_2]$ est une dérivation sur A.

9. ***a)*** Soit $x \in A$, on a $[\delta,d_a](x) = \delta(d_a(x)) - d_a(\delta(x)) = \delta(ax - xa) - a\delta(x) - \delta(x)a$.
Or $\delta(ax - xa) = \delta(ax) - \delta(xa) = a\delta(x) + \delta(a)x - x\delta(a) + \delta(x)a$
En simplifiant on obtient donc $[\delta,d_a](x) = \delta(a)x - x\delta(a) = d_{\delta(a)}(x)$.
On a donc bien $[\delta,d_a] = d_{\delta(a)}$.

b) En utilisant la question précédente on peut écrire $[d_a,d_b] = d_{d_a(b)}$.
Ce qui donne bien $[d_a,d_b] = d_{[a,b]}$.

Exercice 4 – ♡ Théorème de Cantor-Bernstein ♡

1. Comme $h(E) \subset E$, on a $E \in H_1$.
Comme $\varnothing \subset h(\varnothing)$, on a $\varnothing \in H_2$.

2. On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$

Comme $V = \bigcap_{X \in H_1} X$, on a $V \subset X$ pour tout $X \in H_1$.
Comme h est croissante, on a donc $h(V) \subset h(X)$ pour tout $X \in H_1$.
Comme $\forall X \in H_1$, $h(X) \subset X$, on obtient $h(V) \subset X$ pour tout $X \in H_1$.
Mais alors, en prenant l'intersection sur tous les $X \in H_1$, on peut écrire $h(V) \subset \bigcap_{X \in H_1} X = V$.

$\boxed{\supset}$

On a montré que $h(V) \subset V$.
Mais alors $h(V)$ est un élément de H_1, ce qui implique que $h(V)$ est l'un des termes X de l'intersection $V = \bigcap_{X \in H_1} X$. On en déduit que $V \subset h(V)$.

Finalement, $h(V) = V$.

3. On montre $W = h(W)$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$

Comme $W = \bigcup_{X \in H_2} X$, on a $X \subset W$ pour tout $X \in H_2$.
Comme h est croissante, on a donc $h(X) \subset h(W)$ pour tout $X \in H_2$.
Comme $\forall X \in H_2$, $X \subset h(X)$, on obtient $X \subset h(W)$ pour tout $X \in H_2$.
Mais alors, en prenant la réunion sur tous les $X \in H_2$, on peut écrire $W = \bigcup_{X \in H_2} X \subset h(W)$.

$\boxed{\subset}$

On a montré que $W \subset h(W)$.
Mais alors $h(W)$ est un élément de H_2, ce qui implique que $h(W)$ est l'un des termes X de la réunion $W = \bigcup_{X \in H_2} X$. On en déduit que $h(W) \subset W$.

Finalement, $h(W) = W$.

4. Comme $h(X) = X$, on a $X \in H_1$ et $X \in H_2$. Mais alors X est l'un des termes de l'intersection V et l'un des termes de la réunion W. On en déduit $V \subset X \subset W$.

5. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Supposons $X \subset Y$.
Alors $f(X) \subset f(Y)$. Donc $\overline{f(X)} \supset \overline{f(Y)}$. Donc $g\left(\overline{f(X)}\right) \supset g\left(\overline{f(Y)}\right)$.
Donc $\overline{g\left(\overline{f(X)}\right)} \subset \overline{g\left(\overline{f(Y)}\right)}$, autrement dit $h(X) \subset h(Y)$ et h est bien croissante.

6. On sait que $h(M) = M$, autrement dit $\overline{g\left(\overline{f(M)}\right)} = M$.

En passant au complémentaire on a $g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$ comme demandé.

Soit x un élément de $\overline{M}$. Alors $x \in g\left(\overline{f(M)}\right)$, donc x admet au moins un antécédent par f (et cet antécédent appartient à $\overline{f(M)}$).

L'unicité de cet antécédent de x est une conséquence de l'injectivité de g.

7. Remarquons que φ envoie tout élément de M dans $f(M)$, et tout élément de $\overline{M}$ dans $\overline{f(M)}$.

• Montrons l'injectivité de φ.

Soient x, $y \in E$. Supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

$\triangleright$ *Premier cas : si $\varphi(x) \in f(M)$.*

Dans ce cas $\varphi(y) \in f(M)$ aussi.

Alors x et y sont dans M. Par conséquent $\varphi(x) = f(x)$ et $\varphi(y) = f(y)$. Mais alors $f(x) = f(y)$ et on obtient $x = y$ par injectivité de f.

$\triangleright$ *Deuxième cas : si $\varphi(x) \in \overline{f(M)}$.*

Dans ce cas $\varphi(y) \in \overline{f(M)}$ aussi.

Alors x et y sont dans $\overline{M}$. Par conséquent $\varphi(x)$ est un antécédent de x par g et $\varphi(y)$ est un antécédent de y par g.

Partons alors de l'égalité $\varphi(x) = \varphi(y)$, appliquons g pour obtenir $g(\varphi(x)) = g(\varphi(y))$, qui se simplifie en $x = y$.

Finalement, φ est bien injective.

• Démontrons la surjectivité de g.

Soit $y \in F$. On cherche un antécédent de y par g.

$\triangleright$ *Premier cas : si $y \in f(M)$.*

Alors y peut s'écrire $y = f(x)$ avec $x \in M$. Par définition de φ, on a alors $\varphi(x) = y$.

$\triangleright$ *Deuxième cas : si $y \in \overline{f(M)}$.*

Alors $g(y) \in g\left(\overline{f(M)}\right) = \overline{M}$. Par définition de φ on a alors $\varphi(g(y)) = y$ et on a bien obtenu un antécédent de y par φ.

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est bijective..}}$

8. Les applications $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x$ (celle qu'on appelle l'injection canonique de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$!) et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x + 1$ sont injectives, donc par le théorème de Cantor-Bernstein $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$ sont équipotents.

Remarque : On pourrait aussi montrer ce résultat directement, en donnant explicitement une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$. Par exemple l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(x) = x - 1$ si $x \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(x) = x$ sinon convient.

9. L'application $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est injective.

Dans l'autre sens on peut penser par exemple à $\psi : \mathbb{R} \to [0;1]\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\arctan(x) + 1$, elle est strictement croissante (donc injective) et d'ensemble image $]0;1[$, le nombre $\arctan x$ étant toujours strictement compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement, $[0;1]$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents par le théorème de Cantor-Bernstein.

Remarque : On pourrait aussi bien entendu donner directement une bijection explicite entre $[0;1]$ et $\mathbb{R}$. Toutefois, ces bijections explicites deviennent malaisées à écrire, notamment dans les deux questions suivantes.

10. Dans un sens, c'est facile : l'injection canonique $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto n$ convient.

C'est plus compliqué dans l'autre sens, il faut trouver un moyen de « coder » de façon injective chaque rationnel par un entier naturel.

Chaque rationnel $x \in \mathbb{Q}$ peut s'écrire de façon unique $x = \pm\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et p/q est une fraction irréductible. Notons $s = 0$ si x est positif et $s = 1$ si x est strictement négatif.

Posons alors $\psi(x) = 10^{2p+1} + 10^{2q} + s$. Autrement dit, $\psi(x)$ est un entier naturel dont l'écriture décimal comporte deux ou trois chiffres un, et des zéros sinon, organisés comme suit :

— Le chiffre des unités vaut 0 ou 1 selon si x est positif ou négatif.

— Le un qui se situe à un emplacement impair indique quel est le numérateur de x.

— Le un qui se situe à un emplacement pair (autre que le chiffre des unités) indique quel est le dénominateur de x.

L'unicité de l'écriture en base 10 d'un entier naturel assure alors l'injectivité de $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

Donc $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

11. L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), n \mapsto \{n\}$ est injective.

Dans l'autre sens : étant donnée $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une partie finie de l'ensemble $\mathbb{N}$, notons $\psi(A) = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \ldots 10^{a_n}$, ou encore : $\psi(A) = \displaystyle\sum_{a \in A} 10^a$.

À nouveau l'unicité de l'écriture en base 10 assure l'injectivité de ψ.

Par le théorème de Cantor-Bernstein, les ensembles $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

Remarque : En utilisant la base 2 au lieu de la base 10, c'est-à-dire en posant $\psi(A) = \displaystyle\sum_{a \in A} 2^a$, l'application ψ est en fait directement bijective de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$...