DS 4 – Éléments de correction

Exercice 1 – Divers

1. $\binom{8}{1}\binom{4}{2} \times \binom{7}{1}\binom{4}{3} \times \binom{24}{1}$ (choix de la paire, du brelan et de la carte restante)

2. $\dfrac{9!}{3!2!}$ (neuf lettres, trois A répétés et deux M répétés)

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} \leqslant 0$ donc (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune.

4. $\ln\left[1 + \left(\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}} - 1\right)\right]\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right) \sim \left(\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}} - 1\right)\dfrac{1}{2n} \sim -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 \dfrac{1}{2n} = \dfrac{-1}{n^2}$

Exercice 2 – Une étude de suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. L'existence d'une solution découle du TVI et son unicité de la stricte monotonie.

2. $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$, la croissance de f_n assure alors $u_n \in [0;1]$.

3. $f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1}) = [u_{n-1}^5 + nu_{n-1} - 1] - [u_{n-1}^5 + (n-1)u_{n-1} - 1] = u_{n-1}$.
Mais $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$, donc $f_n(u_{n-1}) = u_{n-1} \geqslant 0 = f_n(u_n)$.
D'après la stricte croissance de f_n on a alors $u_{n-1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite finie ℓ d'après le théorème de convergence monotone. Comme $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, on a aussi $u_n = \dfrac{1 - u_n^5}{n}$. Par passage à la limite (le numérateur de la fraction à droite est convergent donc borné, le dénominateur tend vers $+\infty$), on a $u_n \to 0$.

5. On repart de $u_n = \dfrac{1 - u_n^5}{n}$. Comme u_n est de limite nulle, le numérateur tend vers 1 donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3 – Une suite récurrente

1. $a = 0$ convient (la suite (u_n) est alors constante égale à 0). S'il existait un $a > 0$ qui convenait, on devrait avoir pour tout $n > 0$ l'égalité $a = \dfrac{a^2}{\sqrt{n}}$, donc $a = \sqrt{n}$, ce qui est absurde.

2. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors en partant de $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$ et en passant à la limite (la fraction de droite, de la forme « borné sur infini », tend vers 0), on obtient $\ell = 0$.

3. Si $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout entier naturel non nul n, alors $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante. Dans ce cas, comme $\sqrt{n} \to +\infty$, on a $u_n \to +\infty$.

4.

a) On procède par récurrence sur $n \geqslant k$. L'initialisation pour $n = k$ est donnée par les hypothèses. Pour l'hérédité, si $u_n < \sqrt{n}$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

b) À partir du rang k on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} = u_n \times \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant u_n$.
Donc (u_n) est décroissante à partir du rang k.

c) Étant aussi minorée, la suite (u_n) converge d'après le théorème de convergence monotone. D'après la question ***3*** on a alors $u_n \to 0$.

5. ***a)*** Par récurrence (immédiate ?)

b) Par récurrence. L'initialisation pour $n = 1$ est triviale ; pour l'hérédité on se sert de $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n - \dfrac{1}{2} \ln n$. Alors en partant de

$$\ln u_n = 2^{n-1} \ln a \; - 2^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$$

on aboutit à

$$\ln u_{n+1} = 2^n \ln a \; - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}} \; - \frac{1}{2} \ln n$$

En faisant rentrer le dernier terme dans la somme il vient

$$\ln u_{n+1} = 2^n \ln a \; - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$$

et c'est gagné.

6. ***a)*** $v_{n+1} - v_n = w_{n+1} \geqslant 0$ donc (v_n) est croissante.

b) Pas besoin de récurrence : on calcule $v_n - \dfrac{1}{2} v_{n-1} = v_{n-1} + w_n - \dfrac{1}{2} v_{n-1} = w_n + \dfrac{1}{2} v_{n-1}$.
Cette expression vaut $2^{-n-1} \ln(n+1) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-1} \ln(k+1)$, ou encore :

$$v_n - \frac{1}{2} v_{n-1} = 2^{-n-1} \ln(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-2} \ln(k+1)$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} [\ln(k+1) - \ln(k)]$, cette somme est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} \ln(k) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k-2} \ln(k+1)$.
On regroupe en une seule somme : $2^{-n-1} \ln(n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(2^{-k-1} - 2^{-k-2}\right) \ln(k+1)$ et on a bien l'égalité :

$$v_n - \frac{1}{2} v_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

À partir de là l'égalité $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \; - w_n$ peut par exemple être montrée par récurrence.

c) On a $k \geqslant 1$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leqslant \ln 2$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\right) \ln 2$.
Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{1 - 2^{-n+1}}{1 - 2^{-1}} - 1 \leqslant \frac{1}{1 - 2^{-1}} - 1 = 1$, ce qui donne l'inégalité de droite.
Pour l'inégalité de gauche, il suffit de remarquer que la somme est minorée par son premier terme qui vaut précisément $\dfrac{1}{2} \ln 2$.

d) La suite (v_n) est croissante (***6a***) et majorée (Comme $w_n \geqslant 0$ on a $v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln 2$) donc converge vers une limite $W \in \mathbb{R}$ d'après la théorème de convergence monotone. De plus, en partant de $v_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - w_n$ et en utilisant l'encadrement de ***6c***, il vient

$$w_n + \frac{\ln 2}{2} \leqslant v_n \leqslant w_n + \ln 2$$

Comme w_n tend vers 0 (croissance comparée), par passage à la limite on trouve bien l'inégalité $\frac{\ln 2}{2} \leqslant W \leqslant \ln 2$.

7. ***a)*** $\boxed{\Leftrightarrow}$ Si (u_n) converge alors on a vu que sa limite est 0, donc $u_k < 1$ à partir d'un certain rang.

$\boxed{\Rightarrow}$ S'il existe un $k > 2$ tel que $u_k < 1$ alors, comme $1 < \sqrt{2}$, on a $u_k < \sqrt{k}$. D'après ***4*** il s'ensuit que (u_n) converge.

b) On a $u_n < 1$ si et seulement si $\ln u_n < 0$, si et seulement si $2^{n-1} \ln a < 2^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$, si et seulement si $\ln a < \frac{1}{2} v_{n-2}$.

Mais alors :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si (u_n) converge alors sa limite est nulle et $u_n < 1$ à partir d'un certain rang. On a alors $\ln a < \frac{1}{2} v_{n-2}$ à partir d'un certain rang et, par passage à la limite, $\ln a \leqslant \frac{1}{2} W$, ce qui donne bien $a < e^{W/2}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $a < e^{W/2}$ alors $2 \ln a < W$. Mais comme v_{n-2} converge vers W, alors $v_{n-2} > 2 \ln a$ à partir d'un certain rang, donc il existe un rang k tel que $u_k < 1$. On en déduit que (u_n) converge.

c) D'après la question précédente, $a \geqslant e^{W/2}$ si et seulement si (u_n) ne converge pas.

Mais lorsque (u_n) ne converge pas, d'après ***4*** il n'existe pas d'entier k tel que $u_k < k$, autrement dit $u_k \geqslant \sqrt{k}$ pour tout k, ce qui d'après ***3*** implique $u_n \to +\infty$.

8. Comme $\frac{\ln 2}{2} \leqslant W \leqslant \ln 2$, alors $\sqrt[4]{2} \leqslant e^{W/2} \leqslant \sqrt{2}$.

Donc si $a < \sqrt[4]{2}$ alors $a < e^{W/2}$ et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Et si $a \geqslant \sqrt{2}$ alors $a \geqslant e^{W/2}$ et donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 – Postulat de Bertrand

1. Par la formule du binôme on a $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$. Cette somme est à termes positifs, en ne conservant que les termes $k = n$ et $k = n+1$ on obtient l'inégalité $\binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \leqslant 2^{2n+1}$.

Mais, par symétrie des coefficients du binômes, $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

D'où $2\binom{2n+1}{n} \leqslant 2^{2n+1}$, qui donne l'inégalité voulue en simplifiant par 2.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, ou encore $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. En multipliant par -2, cet encadrement devient : $-2x \leqslant -2 \lfloor x \rfloor < -2x + 2$.

De plus, on a aussi $2x-1<\lfloor 2x\rfloor \leqslant 2x$. Par somme il vient $-1<\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor<2$. Comme $\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor$ est un entier, on a bien le résultat voulu.

Notons $k=\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x et $\alpha=x-\lfloor x\rfloor$ sa partie fractionnaire. On va montrer que $\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=0$ si et seulement si $\alpha\in[0;1/2[$.

- Si $0\leqslant\alpha<1/2$ alors

$$\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=\lfloor 2k+2\alpha\rfloor-2\lfloor k+\alpha\rfloor=2k+\lfloor\overbrace{2\alpha}^{<1}\rfloor-2k-2\lfloor\overbrace{\alpha}^{<1}\rfloor=2k+0-2k-0=0$$

- Si $1/2\leqslant\alpha<1$ alors

$$\lfloor 2x\rfloor-2\lfloor x\rfloor=\lfloor 2k+2\alpha\rfloor-2\lfloor k+\alpha\rfloor=2k+\lfloor\overbrace{2\alpha}^{\geqslant 1}\rfloor-2k-2\lfloor\overbrace{\alpha}^{<1}\rfloor=2k+1-2k-0=0$$

3. On calcule $\ln T-n=\dfrac{n}{3}\ln 4+\dfrac{1}{2}\ln n-\sqrt{n/2}\,\ln(2n)$ ou encore :

$$\ln T_n=\frac{\ln 4}{3}n+\frac{1}{2}\ln n-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\ln n$$

Or les trois termes $\ln n$, $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}\ln n$ sont tous négligeables devant n.

Donc $\ln T_n\sim\dfrac{\ln 4}{3}n$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que $\ln T_n\to+\infty$ et donc que $T_n\to+\infty$.

4. L'expression $\dfrac{2}{3}n-\sqrt{2n}=\dfrac{\sqrt{2n}}{3}\sqrt{2n}-\sqrt{2n}$ se factorise en $\dfrac{\sqrt{2n}}{3}\left(\sqrt{2n}-3\right)$, elle est positive si et seulement si n est nul ou $\sqrt{2n}\geqslant 3$ (c'est-à-dire $n\geqslant\dfrac{9}{2}$). Comme n est un entier, $\dfrac{2}{3}n-\sqrt{2n}$ est strictement positif pour $n\geqslant 5$ et négatif pour $n\leqslant 4$ (nul pour $n=0$).

5. ***a)*** On a $a_n=\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\times\dfrac{n!^2}{(2n)!}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$.

b) On peut s'en tirer avec une étude de fonction, on peut aussi partir de l'expression $\sqrt{1-x}-1$ et utiliser la quantité conjuguée :

$$\sqrt{1-x}-1=\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-x}{\underbrace{\sqrt{1-x}+1}_{\geqslant 1}}$$

c) Pour l'initialisation ($n=2$) on a besoin de montrer que $6>\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $\sqrt{2}>\dfrac{4}{3}$.

Cette inégalité découle de $2>\dfrac{16}{9}$.

Pour montrer l'hérédité, il faut arriver à passer de $\dbinom{2n}{n}>\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$ à $\dbinom{2n+2}{n+1}>\dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$.

Le terme de gauche est multiplié par $a_n=\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ et celui de droite est multiplié par $\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, il suffit donc de montrer que $\dfrac{2(2n+1)}{n+1}\geqslant\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ pour aboutir.

Mais cette inégalité équivaut à $4\sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}\leqslant\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$, ou encore, en arrangeant un peu, à $\sqrt{1-\dfrac{1}{n+1}}\leqslant\dfrac{(2n+1)}{2(n+1)}=1-\dfrac{1}{2(n+1)}$, elle est donc donnée par la question ***b)*** appliquée à $x=-\dfrac{1}{n+1}$.

6. Si $k > \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, alors $k > \dfrac{\ln n}{\ln p}$, donc $k \ln p > \ln n$, donc $p^k > n$.
Il s'ensuit que $0 \leqslant \dfrac{n}{p^k} < 1$ et donc que $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

7. Soit x un réel et $\alpha \in [0;1[$. Par croissance de la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$, on a $\lfloor x+\alpha \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor$ et donc $\lfloor x+\alpha \rfloor - \lfloor x \rfloor \geqslant 0$. On a aussi $\lfloor x+\alpha \rfloor \leqslant \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ et donc $\lfloor x+\alpha \rfloor - \lfloor x \rfloor \leqslant 1$.
Par conséquent $\lfloor x+\alpha \rfloor - \lfloor x \rfloor \in \{0{,}1\}$. Appliquons ce résultat à $V_p(2n) - V_p(n)$:

$$V_p(2n) - V_p(n) = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} + \frac{\ln 2}{\ln p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor \in \{0{,}1\}$$

8. Par commodité, notons $A = v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right)$

On a $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$, donc $A = v_p((2n)!) - 2v_p(n!)$. Mais alors :

$$A = \sum_{k=1}^{V_p(2n)} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\sum_{k=1}^{V_p(n)} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

On peut distinguer deux cas selon si $\varepsilon_p(n) = V_p(2n) - V_p(n)$ vaut 0 ou 1.
• Si $\varepsilon_p(n) = 0$, c'est-à-dire si $V_p(2n) = V_p(n)$.

$$\text{Alors} \quad A = \sum_{k=1}^{V_p(n)} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k=1}^{V_p(n)} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{V_p(n)} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

qui est la formule attendue.
• Si $\varepsilon_p(n) = 0$, c'est-à-dire si $V_p(2n) = V_p(n) + 1$, alors on a juste un terme en plus par rapport au cas précédent : c'est $\left\lfloor \dfrac{2n}{p^{V_p(2n)}} \right\rfloor$. On vérifie par un encadrement que ce terme est égal à 1.

Dans tous les cas on a bien $v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{V_p(n)} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) + \varepsilon_p(n)$.
Il reste à montrer la deuxième égalité.
La somme précédente contient $V_p(n)$ termes tous égaux à 0 ou 1, on a donc la majoration :

$$\sum_{k=1}^{V_p(n)} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) + \varepsilon_p(n) \leqslant V_p(n) + \varepsilon_p(n) = V_p(2n)$$

9. • Tout d'abord on a d'après la question précédente :

$$p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leqslant p^{V_p(2n)} \leqslant p^{\ln(2n)/\ln(p)} = 2n$$

• Supposons que $\sqrt{2n} \leqslant p$.
Notons qu'on peut supposer l'inégalité stricte (sinon on aurait $2n = p^2$ et donc $p = 2$, puisque p est premier. Mais alors on aurait $n = 4$ et on vérifie qu'on a bien $v_2(\binom{8}{4}) = 1$).
En appliquant la fonction logarithme, $\dfrac{1}{2}\ln(2n) < \ln p$ et donc $\dfrac{\ln(2n)}{\ln p} < 2$. Par conséquent $V_p(2n) = \left\lfloor \dfrac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \leqslant 1$ et donc $v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right) \leqslant 1$.

• Supposons maintenant que $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$.
Alors $\ln\frac{2}{3} + \ln n \leqslant \ln p$, donc $\frac{\ln n}{\ln p} \leqslant \frac{\ln 3/2}{\ln p}$.
Or, comme $p \geqslant 2$ on a $\frac{\ln 3/2}{\ln p} < 1$ et donc $\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor = 0$.
Donc $V_p(n) = 0$ et on a bien $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$.

10. ***a)*** Soit $p \in [\![n+2; 2(n+1)]\!]$ un nombre premier. On a $\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$.
Comme $p \leqslant 2n+1$ alors $p|(2n+1)!$.
Comme $p > n+1$, p ne divise ni $n!$ ni $(n+1)!$. Alors comme p est premier, p est premier avec $n!(n+1)!$.
Il s'ensuit que $p \mid \binom{2n+1}{n}$.
Alors le produit de tous les premiers dans $[\![n+2; 2(n+1)]\!]$ divise aussi $\binom{2n+1}{n}$, donc ce produit est majoré par $\binom{2n+1}{n}$, qui est lui-même majoré par 4^n (question ***1***).

b) On veut montrer $P_n \leqslant 4^n$ par récurrence forte sur $n \geqslant 3$.
• Pour $n = 3$ on a $P_3 = 2 \times 3 \leqslant 4^3$.
• Soit $n \geqslant 3$, supposons que $P_k \leqslant 4^k$ pour tous les $k \leqslant n$ et montrons que $P_{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.
On distingue deux cas selon la parité de n.
Premier cas : Si n est impair
Alors $n+1$ n'est pas premier, donc $P_{n+1} = P_n \leqslant 4^n \leqslant 4^{n+1}$.
Deuxième cas : Si n est pair
Notons $n = 2k$. On sépare les nombres premiers inférieurs ou égaux à n en deux ensembles : ceux qui sont inférieurs ou égaux à $k+1$, et ceux qui sont dans $[\![k+2; n]\!] = [\![k+2; 2k+1]\!]$.

$$P_{n+1} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ 1\leqslant p\leqslant n+1}} p = \underbrace{\left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ 1\leqslant p\leqslant k+1}} p\right)}_{=P_{k+1}} \underbrace{\left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ k+2\leqslant p\leqslant 2k+1}} p\right)}_{\leqslant 4^k}$$

Donc $P_{n+1} \leqslant P_{k+1}4^k \leqslant 4^{k+1}4^k = 4^{2k+1} = 4^{n+1}$ et on a achevé la récurrence.

11. Tout nombre premier $p \in [\![n+1; 2n]\!]$ divise $(2n)!$ mais pas $n!$, donc divise $\frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}$.
Et le produit R_n de ces nombres premiers divise aussi $\binom{2n}{n}$.

12. Soit p un nombre premier tel que $\frac{2}{3}n < p$. Montrons que p ne peut diviser Q_n.
Remarquons que $n \geqslant 5$ donc $\sqrt{2n} \leqslant \frac{2}{3}n$ (c'est la question ***4***), donc $p > \sqrt{2n}$.
• Premier cas : Si $p \leqslant n$ alors $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$. D'après la question ***9*** on a alors $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$.
Comme $Q_n \mid \binom{2n}{n}$, on a alors $v_p(Q_n) \leqslant 0$, donc p ne divise pas Q_n.

• Premier cas : Si $p > n$, on a $\sqrt{2n} \leqslant p$ et, toujours d'après la question ***9***, on a $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) \leqslant 1$.
Mais on a aussi $v_p(R_n) = 1$ et $v_p(Q_n) = v_p\left(\binom{2n}{n}\right) - v_p(R_n) \leqslant 0$, on obtient également que p ne peut diviser Q_n.
Finalement, tous les diviseurs premiers de Q_n sont inférieurs ou égaux à $\dfrac{2}{3}n$.

Séparons les diviseurs premiers de Q_n en deux ensembles :
• Les diviseurs premiers p tels que $p \leqslant \sqrt{2n}$.
Il en existe au plus $\pi(\sqrt{2n})$. De plus, pour de tels p on a $p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leqslant 2n$ d'après la question ***9***.
Comme $Q_n \mid \binom{2n}{n}$ on a aussi $p^{v_p(Q_n)} \leqslant (2n)$.
• Les diviseurs premiers p tels que $\sqrt{2n} < p \leqslant \dfrac{2}{3}n$.
Pour ceux là, $v_p(Q_n) = 1$ d'après la deuxième inégalité de ***9***.
Mais alors leur produit est majoré par $P_{\lfloor 2n/3 \rfloor}$.

Assemblons tous les morceaux :

$$Q_n = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid Q_n}} p^{v_p(Q_n)} = \left(\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid Q_n, p \leqslant \sqrt{2n}}} p^{v_p(Q_n)} \right) \left(\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid Q_n, p > \sqrt{2n}}} p \right)$$

$$Q_n \leqslant (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} P_{\lfloor 2n/3 \rfloor} \leqslant (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} 4^{\lfloor 2n/3 \rfloor}$$

$$Q_n \leqslant (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} 4^{2n/3}$$

13. On a $\pi(14) = 6$ (nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13) et $\pi(14) = \pi(15) = \pi(16)$.
Pour $n \geqslant 17$, les impairs de $[\![17; n]\!]$ s'écrivent $2k+1$ avec $17 \leqslant 2k+1 \leqslant n$, ce qui équivaut à $8 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$. Il y en a donc $\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor - 7$.
Comme tous les nombres premiers sont impairs, sauf 2, on a pour $n \geqslant 14$:

$$\pi(n) \leqslant \pi(14) + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 7 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1 \leqslant \frac{n}{2} - 1$$

14. On a $R_n Q_n = \binom{2n}{n}$. De plus, à partir d'un certain rang on a $Q_n \leqslant (2n)^{\pi(\sqrt{2n})} 4^{2n/3}$ (question ***12***) et $\binom{2n}{n} > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$ (question ***5c***). On trouve bien par quotient $R_n \geqslant 4^{n/3}\sqrt{n}(2n)^{-\sqrt{n/2}}$.
D'après la question ***3***, la suite (R_n) tend vers $+\infty$. Donc $R_n > 1$ à partir d'un certain rang, ce qui montre bien qu'il existe au moins un nombre premier strictement compris entre n et $2n$.