DS 5 – Corrigé

Exercice

1. $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\cos\sqrt{x}-1} \sim_{x\to 0} \dfrac{x/3}{-\sqrt{x}^2/2} = -\dfrac{2}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\cos\sqrt{x}-1} = -\dfrac{2}{3}$.

2. Il suffit de démontrer que $\dfrac{\ln(2^n-n)}{n\ln 2} - 1$ tend vers 0 :

$$\frac{\ln(2^n-n)}{n\ln 2} - 1 = \frac{\ln(2^n)+\ln(1-n2^{-n})}{n\ln 2} - 1 = \frac{\ln(1-n2^{-n})}{n\ln 2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Donc $\dfrac{\ln(2^n-n)}{n\ln 2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et donc $\ln(2^n-n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln 2$.

Problème

Préliminaire

1. ***a)*** $40 = 5\times 2^3$ et $108 = 27\times 2^2$ donc $108 \lhd 40$. De plus $31 \lhd 32$.

b) Le plus petit entier strictement supérieur à 31 est 33.
Le plus grand entier strictement inférieur à 108 est 100.

c) $\max(\mathbb{N}^*) = 1$ et $\min(\mathbb{N}^*) = 3$
$\max(2\mathbb{N}^*) = 2$ et $\min(2\mathbb{N}^*) = 6$
$\sup(2\mathbb{N}^*+1) = 6$ (mais $2\mathbb{N}+1$ n'a pas de maximum) et $\min(2\mathbb{N}^*+1) = 3$
$\max(2\mathbb{N}+1) = 1$ et $\min(2\mathbb{N}+1) = 3$
$\max(\mathbb{P}) = 2$ et $\min(\mathbb{P}) = 3$

Partie A

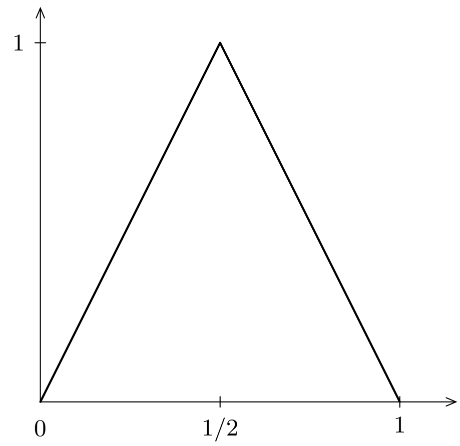
2. ***a)*** On applique le TVI à la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - x$.

b) La fonction constante égale à 0 convient.

3. ***a)*** • La fonction f est continue sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2};1\right]$ comme polynôme.

• En $\dfrac{1}{2}$, la limite à gauche et la limite à droite de f valent 1. Comme de plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, la fonction f est continue en $\dfrac{1}{2}$. D'où : f est continue sur $[0;1]$.

Voilà le graphe de f :



b) On a $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = \dfrac{4}{9}$, puis $f\left(\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{8}{9}$ et $f\left(\dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{2}{9}$. Donc $\dfrac{2}{9}$ est 3-périodique pour f.

c) Remarquons que $x < 1/2$ ssi son premier chiffre (en binaire) après la virgule est 0.
De plus, pour multiplier par 2 on décale les chiffres d'un cran vers la gauche.
Et pour calculer $1 - x$ on inverse les chiffres de x ($0 \to 1$ et $1 \to 0$).

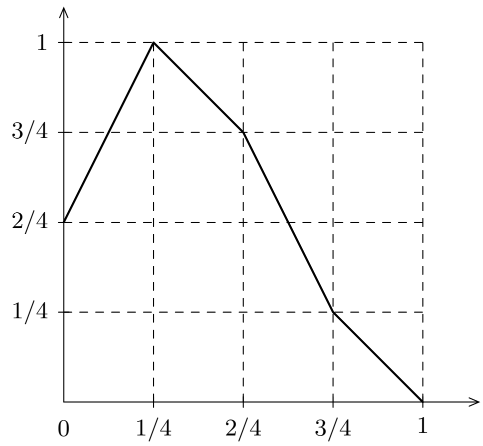
$$\begin{array}{lcl}
x & = & \overline{0,00110\ 00110\ 00110\ 00110\ \dots}^2 \\
f(x) & = & \overline{0,0110\ 00110\ 00110\ 00110\ \dots}^2 \\
f^2(x) & = & \overline{0,110\ 00110\ 00110\ 00110\ \dots}^2 \\
f^3(x) & = & \overline{0,01\ 11001\ 11001\ 11001\ \dots}^2 \\
f^4(x) & = & \overline{0,1\ 11001\ 11001\ 11001\ \dots}^2 \\
f^5(x) & = & \overline{0,00110\ 00110\ 00110\ \dots}^2
\end{array}$$

On remarque que x est 5-périodique.

d) Par exemple $x = \overline{0,0110\ 0110\ 0110\ 0110\ \dots}^2$ convient.

Partie B

4. Voilà le graphe de f :



5. Comme $f(0) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ et $f(1) = 0$, le point 0 est 5-périodique.

6. On trouve successivement :

$$f\left(\left[0;\frac{1}{4}\right]\right) = \left[\frac{2}{4};1\right] \quad \Rightarrow \quad f^2\left(\left[0;\frac{1}{4}\right]\right) = \left[0;\frac{3}{4}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^3\left(\left[0;\frac{1}{4}\right]\right) = \left[\frac{1}{4};1\right]}$$

$$f\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{3}{4};1\right] \quad \Rightarrow \quad f^2\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0;\frac{1}{4}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^3\left(\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{2};1\right]}$$

$$f\left(\left[\frac{3}{4};1\right]\right) = \left[0;\frac{1}{4};1\right] \quad \Rightarrow \quad f^2\left(\left[\frac{3}{4};1\right]\right) = \left[\frac{2}{4};1\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{f^3\left(\left[\frac{3}{4};1\right]\right) = \left[0;\frac{3}{4}\right]}$$

Si $x \in [0;1]$ est un point 3-périodique de f, on doit avoir $f^3(x) = x$.
Si $x \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$, alors on a nécessairement $x = \frac{1}{4}$.
Si $x \in \left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, alors on a nécessairement $x = \frac{1}{2}$.
Si $x \in \left[\frac{3}{4};1\right]$, alors on a nécessairement $x = \frac{3}{4}$.
Mais on vérifie qu'aucun des trois points $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ n'est 3-périodique.

7. L'application f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, et $f\left(\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right)=\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$.

De plus f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$, et $f\left(\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]\right)=\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Enfin f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

En composant, on obtient que $\boxed{f^3 \text{ est strictement décroissante sur } \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right].}$

Mais alors, l'application $g : \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right] \to [0;1]$ définie par $g(x) = f^3(x) - x$ pour $x \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ s'annule en exactement un point de $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$: l'existence est donnée par le théorème des valeurs intermédiaires (g est continue, négative en $1/2$ et positive en $3/4$), et on obtient l'unicité par la stricte décroissance de g.

On en déduit que $\boxed{f^3 \text{ admet un unique point fixe sur } [0,1].}$

8. Remarquons d'abord qu'un point 3-périodique pour f est un point fixe de f^3, mais que tout point fixe x de f^3 n'est pas nécessairement un point 3-périodique pour f : il faut aussi pour cela que x ne soit pas un point fixe de f.

Or, f^3 admet un unique point fixe x. De plus, f admet au moins un point fixe, qui se trouve être aussi un point fixe de f^3. Donc l'unique point fixe de f^3 est un point fixe de f.

Donc f n'admet pas de point 3-périodique.

Remarque : Comme $3 \lhd 5$, le théorème de Charkovski affirme que s'il y a un point 3-périodique, alors il y a un point 5-périodique. La partie C a montré réciproquement l'existence d'une fonction pour laquelle il y a un point 5-périodique mais pas de point 3-périodique.

On pourrait montrer par des techniques similaires que pour tout couple (n,m) d'entiers strictement positifs distincts tels que $n \lhd m$, il existe une fonction f qui a un point m-périodique mais pas de point n-périodique : la conclusion du théorème est optimale.

Partie C

9. On a $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2+f(1)}{3}$ et $F\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

On recherche a et b tels que $F(x) = ax+b$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ et on trouve après calcul :

$$\boxed{\forall x \in \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\ F(x) = (2+f(1))\left(-x+\frac{2}{3}\right)}$$

On fait le même travail sur $\left[\frac{2}{3},1\right]$ et on trouve $\boxed{\forall x \in \left[\frac{2}{3},1\right],\ F(x) = x - \frac{2}{3}.}$

10. Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$, alors $F(x) = \frac{2}{3} + \frac{f(3x)}{3}$.

Comme $0 \leqslant f(3x) \leqslant 1$, on en déduit que $\frac{2}{3} \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$. Donc on a $\boxed{F\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\frac{2}{3},1\right].}$

Comme F est affine sur $\left[\frac{2}{3},1\right]$, on a $F\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right) = \left[F\left(\frac{2}{3}\right),F(1)\right]$. On a donc $\boxed{F\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right) = \left[0,\frac{1}{3}\right].}$

11. Chercher les points fixes x de F revient à résoudre $F(x) = x$.

- Comme $\left[0,\frac{1}{3}\right] \cap F\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) = \varnothing$, l'équation $F(x) = x$ n'a pas de solution dans $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

- Comme $\left[\frac{2}{3},1\right] \cap F\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right) = \varnothing$, l'équation $F(x) = x$ n'a pas non plus de solution dans $\left[\frac{2}{3},1\right]$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, l'équation $F(x) = x$ équivaut à $(2 + f(1))\left(-x + \frac{2}{3}\right) = x$ qui a une unique solution $p = \frac{2(2+f(1))}{3(3+f(1))}$, et on vérifie que $\frac{2(2+f(1))}{3(3+f(1))}$ appartient bien à $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

Finalement, $\boxed{F \text{ admet un unique point fixe } p.}$

12. ***a)*** Le coefficient directeur a de F sur le segment $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ vaut $-2 - f(1)$ d'après la question ***9***.
Comme $f(1) \geqslant 0$, on a $\boxed{a \leqslant -2.}$

b) Comme u_n et $u_{n+1} = F(u_n)$ appartiennent au segment $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ sur lequel F est affine de coefficient directeur a, on a $\frac{u_{n+1} - p}{u_n - p} = \frac{F(u_n) - p}{u_n - p} = a$
Par conséquent $|u_{n+1} - p| = a\,|u_n - p|$ et $\boxed{|u_{n+1} - p| \geqslant 2\,|u_n - p|\,.}$

c) Par récurrence immédiate, on obtient $|u_n - p| \geqslant 2^n |u_0 - p|$.
Comme $u_0 \neq p$, on en déduit $\boxed{|u_n - p| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

C'est absurde puisque la suite (u_n) est bornée (tous les u_n sont dans le segment $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$).

d) Soit $x \in \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\setminus \{p\}$ un point périodique de F. Considérons la suite (u_n) définie précédemment ($u_0 = x$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout n).
Si tous les u_n sont dans $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$, on aboutit à une contradiction d'après la question précédente.
Donc il existe un indice n_0 tel que u_{n_0} appartient à $\left[0;\frac{1}{3}\right[$ ou à $\left]\frac{2}{3};1\right]$.
Mais comme l'ensemble $\left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};1\right]$ est stable par F (question 19), tous les u_n sont dans $\left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};1\right]$ à partir du rang n_0.
Comme x est périodique pour F, la suite (u_n) est périodique, il existe un $N \geqslant n_0$ tel que $u_0 = u_N$ et on doit donc avoir $x = u_0 \in \left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};1\right]$, absurde.

Donc $\boxed{F \text{ n'a pas d'autre point périodique dans } \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\text{ que son point fixe } p.}$

13. ***a)*** On trouve successivement, pour $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$:

$$\boxed{F(x) = \frac{2}{3} + \frac{f(3x)}{3}} \quad \in \left[\frac{2}{3};1\right]$$

$$F^2(x) = F(x) - \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F^2(x) = \frac{f(3x)}{3}} \quad \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$$

$$F^3(x) = F\left(\frac{f(3x)}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{f\left(3\frac{f(3x)}{3}\right)}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F^3(x) = \frac{2}{3} + \frac{f^2(3x)}{3}} \quad \in \left[\frac{2}{3};1\right]$$

$$F^4(x) = F^3(x) - \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F^4(x) = \frac{f^2(3x)}{3}}$$

b) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $F^{2k}(x) = \dfrac{f^k(3x)}{3}$.

- La propriété est vérifiée pour $k = 1$ d'après la question précédente.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $F^{2k}(x) = \dfrac{f^k(3x)}{3}$.

Alors, comme $\dfrac{f^k(3x)}{3} \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$, on a $F^{2k+1}(x) = F\left(\dfrac{f^k(3x)}{3}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{f\left(3\frac{f^k(3x)}{3}\right)}{3}$, donc $F^{2k+1}(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{f^{k+1}(3x)}{3}$.

Comme $F^{2k+1}(x) \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$, il vient ensuite $F^{2k+2}(x) = F^{2k+1}(x) - \dfrac{2}{3} = \dfrac{f^{k+1}(3x)}{3}$, ce qui démontre l'hérédité et achève la récurrence.

On en déduit : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F^{2k}(x) = \dfrac{f^k(3x)}{3}.}$

c) Soit x un point n-périodique pour f. On a donc $f^n(x) = x$, mais $f^p(x) \neq x$ pour $1 \leqslant p < n$.

D'après la question précédente, on a $F^{2n}\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f^n\left(3\frac{x}{3}\right)}{3} = \dfrac{f^n(x)}{3} = \dfrac{x}{3}$.

Il reste à montrer que $F^p\left(\dfrac{x}{3}\right) \neq \dfrac{x}{3}$ pour $1 \leqslant p < n$.

Soit p un entier tel que $1 \leqslant p < n$.

- Si p est pair, alors $F^p\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f^{p/2}(x)}{3} \neq \dfrac{x}{3}$.
- Si p est impair, alors $F^p\left(\dfrac{x}{3}\right) \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$ et $\dfrac{x}{3} \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$, donc $F^p\left(\dfrac{x}{3}\right) \neq \dfrac{x}{3}$.

Ce qui permet de conclure :

$\boxed{\text{Si } x \text{ est un point } n\text{-périodique de } f, \text{ alors } x/3 \text{ est un point } 2n\text{-périodique de } F.}$

14. ***a)*** On sait d'après la question 12 que x appartient à $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ ou $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$.

Mais comme $F\left(\left[0,\dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[\dfrac{2}{3},1\right]$ et $F\left(\left[\dfrac{2}{3},1\right]\right) \subset \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, on en déduit par une récurrence immédiate que :

- si $x \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ alors $F^{2k+1}(x) \in \left[\dfrac{2}{3},1\right]$ pour tout entier impair $2k+1$.
- si $x \in \left[\dfrac{2}{3},1\right]$ alors $F^{2k+1}(x) \in \left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ pour tout entier impair $2k+1$.

Dans tous les cas, $F^{2k+1}(x) \neq x$.

Donc $\boxed{\text{la période de } x \text{ est un entier pair.}}$

b) Si x n'appartient pas à $\left[0; \dfrac{1}{3}\right]$, alors x appartient à $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$. Mais alors $F(x) = x - \dfrac{2}{3} \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Donc $\boxed{\text{soit } x, \text{ soit } F(x) \text{ appartient à l'intervalle } \left[0; \dfrac{1}{3}\right].}$

c) On sait que $F^{2q}(x) = x$ et $F^{2k}(x) \neq x$ pour $k < q$.

D'après la question 13b, on a donc $\dfrac{f^q(3x)}{3} = x$ et $\dfrac{f^k(3x)}{3} \neq x$ pour $k < q$.

Autrement dit, $f^q(3x) = 3x$ mais $f^k(3x) \neq 3x$ pour $k < q$.

C'est-à-dire : $\boxed{3x \text{ est } q\text{-périodique pour } f.}$

15. Si f a un point n-périodique, alors F a un point $2n$-périodique : c'est la question 13c.
Si F a un point $2n$-périodique, alors f a un point n-périodique : c'est la question 14c.

16. En appliquant ce résultat à la fonction f définie dans la partie B (qui a un point de période 5 mais qui n'a pas de point de période 3), on obtient une fonction F admettant un point 10-périodique mais aucun point 6-périodique.

Partie D

17. ***a)*** $K = \{x\} \subset f(J)$ donc x admet un antécédent a par f. Le singleton $L = \{a\}$ convient.

b) Puisque α et β appartiennent à $f(J)$, ils ont des antécédents a et b dans J.

c) L'ensemble A est non vide car il contient b. De plus il est minoré par a. Donc il admet une borne inférieure v. D'après la caractérisation de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un $v_n \in A$ tel que $v \leqslant v_n < v + 1/n$. Comme $\lim v_n = v$ et comme f est continue, on a $f(v) = f(\lim v_n) = \lim f(v_n) = \beta$. Donc $v \in A$ est bien un minimum.

d) On raisonne comme à la question précédente pour obtenir l'existence de $u = \max B$. (B est non vide car $a < b$.)

Montrons ensuite que le segment $L = [u,v]$ convient, autrement dit que $f(L) = [\alpha,\beta]$. Déjà, $f(L)$ contient $f(u)$ et $f(v)$ donc $[f(u),f(v)] = [\alpha,\beta]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Montrons par l'absurde que $f(L) \subset [\alpha,\beta]$. Supposons qu'il existe $c \in [u,v]$ tel que $f(c) > \beta$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [u,c]$ tel que $f(x) = \beta$. Ce qui contredit la minimalité de v. De même, $f(c) < \alpha$ est impossible.

18. Soit $K = [\alpha,\beta]$ et $f(K) = [a,b]$. Par hypothèse, $a \leqslant \alpha$ et $\beta \leqslant b$. Soit u un antécédent de α par f et v un antécédent de β par f avec $u,v \in [\alpha,\beta]$. Donc $f(u) - u = \alpha - u \leqslant 0$ car $u \in [\alpha,\beta]$ et $f(v) - v = \beta - v \geqslant 0$ car $v \in [\alpha,\beta]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $x \mapsto g(x) = f(x) - x$ s'annule sur $[\alpha,\beta]$. Donc $\boxed{f \text{ admet un point fixe dans ce segment.}}$

19. On construit les segments J_k par récurrence descendante grâce à la question ***17***.
Puisque $f(I_{n-1}) \supset I_n$, il existe un segment $J_{n-1} \subset I_{n-1}$ tel que $f(J_{n-1}) = I_n$.
Puisque $f(I_{n-2}) \supset J_{n-1}$, il existe $J_{n2} \subset I_{n-2}$ tel que $f(J_{n-2}) = J_{n-1}$, et ainsi de suite.
Si $x_0 \in J_0$ alors $f^k(x_0) \in J_k$ car $f^k(J_0) = J_k$.

20. La fonction f admet un point fixe d'après question ***2a***. Montrons qu'il existe un point 2-périodique. On suppose tout d'abord $x_0 < x_1 < x_2$. On pose $S_1 = [x_1,x_2]$ et $S_2 = [x_0,x_1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(S_1) \supset S_1 \cup S_2$ et $f(S_2) \supset S_1$. Donc on a bien $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$.
D'après la question précédente appliquée avec $S_1 \to S_2 \to S_1$, il existe un segment $J_0 \subset S_1$ tel que $f(J_0) \subset S_2$ et $f^2(J_0) = S_1$. Donc f^2 admet un point fixe $c \in J_0$. Ce point ne peut pas être un point fixe de f car sinon on aurait $f(c) = c$ et on aurait $c \in S_1 \cap S_2$, c'est-à-dire $c = x_1$, absurde car x_1 est 3-périodique.

Si $x_0 < x_2 < x_1$, on pose $S_1 = [x_0,x_2]$ et $S_2 = [x_2,x_1]$. On a encore $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_1$ et on conclut de la même manière.

21. On garde les notations de la question précédente. D'après la question précédente et l'hypothèse, il existe des points de période 1, 2 et 3. Soit $n \geqslant 4$. Si $x_0 < x_1 < x_2$, on pose $S_1 = [x_1,x_2]$ et $S_2 = [x_0,x_1]$. On a alors $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$ (avec $n-1$ termes S_2). D'après la question 19, il existe des segments J_k tels que $J_0 \subset S_1$, $J_k \subset S_2$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, $f(J_k) = J_{k+1}$ et $f(J_{n-1}) = S_1$. Donc $f^n(J_0) = S_1 \supset J_0$ et f^n admet un point fixe c dans J_0.

Montrons que c est un point n-périodique. Si $f^p(c) = c$ avec $p \in [\![1,n-1]\!]$, alors $c = f^p(c) \in J_p \in S_2$ donc $c \in S_1 \cap S_2$ donc $c = x_1$. Mais $f^2(c) = f^2(x_1) = x_0 \notin S_2$, contradiction.

Si $x_0 < x_2 < x_1$, on pose $S_1 = [x_0,x_2]$ et $S_2 = [x_2,x_1]$. On a encore $S_1 \to S_1$ et $S_1 \to S_2 \to S_2 \to \cdots \to S_2 \to S_1$ et le raisonnement est le même.