DS 6 – Corrigé

Exercice 1

1. • On montre d'abord $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E) = \{0\}$.
On prend x dans l'intersection, on a alors $f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$, en soustrayant on a bien $x = 0$.
• On montre ensuite que la somme vaut E. On prend $x \in E$ et on cherche à l'écrire $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$,c'est-à-dire $f(x_1) = 2x_1$, et $x_2 \in \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$, c'est-à-dire $f(x_2) = 3x_2$.
On peut procéder par analyse-synthèse.
De $x = x_1 + x_2$ il vient $f(x) = 2x_1 + 3x_2$. En soustrayant deux fois la première équation à la deuxième, on trouve $x_2 = f(x) - 2x$.
Dans la partie synthèse on vérifie que la décomposition $x = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x)$ convient.

2. Il suffit de prendre une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ adaptée à la somme directe $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$, c'est à dire obtenue en concaténant une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $\ker(f - 2\,\mathrm{Id}_E)$ et une base $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de $\ker(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2 - Calcul de puissance

1. On utilise la formule du binôme (les endomorphismes Id_E et u commutent).

$$(\mathrm{Id}_E + u)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k = \binom{n}{0} u^0 + \binom{n}{1} u^1 + \binom{n}{2} u^2 = \mathrm{Id}_E + nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2$$

2. On peut par exemple conjecturer que la formule précédente fonctionne encore pour $n = -1$ et montrer que l'inverse de $\mathrm{Id}_E + u$ est $\mathrm{Id}_E - u + u^2$.
Il suffit de développer pour vérifier qu'on a bien

$$(\mathrm{Id}_E + u) \circ (\mathrm{Id}_E - u + u^2) = (\mathrm{Id}_E - u + u^2) \circ (\mathrm{Id}_E + u) = \mathrm{Id}_E$$

Exercice 3 - Image et noyau

1. Pour obtenir $\ker g$, on résout :

$$\begin{cases} x + 7y + 5z + 4t = 0 \\ 2x + y - 3z - 5t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

On trouve après calcul $\ker g = \Big((-2,1,-1,0), (3,-1,0,1)\Big)$ (par exemple — ce n'est pas la seule façon de paramétrer les solutions).
Alors $\dim \ker g = 2$ et d'après le théorème du rang on a $\mathrm{rg}\, g = 4 - 2 = 2$.

2. Comme $(x+7y+5z+4t\,, 2x+y-3z-5t\,, y+z+t) = x(1,2,0) + y(7,1,1) + z(5,-3,1) + t(4,-5,1)$, la famille des vecteurs $(1,2,0)$, $(7,1,1)$, $(5,-3,1)$ et $(4,-5,1)$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, g$. On en extrait une base de deux vecteurs (d'après la question 1).
Par exemple $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}\Big((1,2,0), (7,1,1)\Big)$.

3. Il suffit de vérifier que $v \notin \mathrm{Vect}\Big((1,2,0), (7,1,1)\Big)$. Alors $\mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Vect}\, v = \{0\}$, la somme est directe et on conclut par un argument de dimension $(2 + 1 = 3)$.

4. On décompose (x,y,z) en $(x,y,z) = (x',y',z') + \lambda v$, où $(x',y',z') \in \operatorname{Im} g$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Après calcul on trouve la décomposition :

$$(x,y,z) = \underbrace{\left(x, y, \frac{2}{13}x - \frac{1}{13}y\right)}_{\in \operatorname{Im} g} + \underbrace{\left(0, 0, -\frac{2}{13}x + \frac{1}{13}y + z\right)}_{\in \operatorname{Vect} v}$$

On appelle p le projecteur sur $\operatorname{Vect} v$ parallèlement à $\operatorname{Im} g$.
Et donc $p(x,y,z) = \left(0, 0, -\dfrac{2}{13}x + \dfrac{1}{13}y + z\right)$.

Problème - Noyaux itérés et classification des endomorphismes nilpotents

Partie A - Essoufflement de la suite des noyaux itérés

1. — Si $u^k(x) = 0$ alors $u^{k+1}(x) = 0$.
— S'il existe y tel que $x = u^{k+1}(y)$ alors $x = u^k(u(y))$.
— La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
— La suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. — La suite $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers positifs décroissante. Une telle suite est stationnaire. Donc $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi stationnaire.
— Par le théorème du rang on a $n_k = n - i_k$ pour tout n. Donc $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne au même rang que $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et donc $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne au même rang que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$

3. Par le théorème du rang on a $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$, il suffit de montrer que la somme est directe.
Soit $x \in I_r \cap N_r$. Alors il existe y tel que $x = u^r(y)$, de plus $u^r(x) = 0$. On en déduit $u^{2r}(y) = 0$, donc $y \in N_{2r}$. Mais $N_{2r} = N_r$, donc $y \in N_r$ et on a $u^r(y) = 0$. Ce qui donne bien $x = 0$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\delta_k = i_k - i_{k+1}$.

a) Par théorème du rang, $\delta_k = i_k - i_{k+1} = (n - n_k) - (n - n_{k+1}) = n_{k+1} - n_k$.

b) Comme I_{k+1} est un sev de I_k et comme I_k est de dimension finie, alors I_k a un supplémentaire S dans I_{k+1}.
De plus $\dim S + \dim I_{k+1} = \dim I_k$, ce qui donne $\dim S = i_k - i_{k+1} = \delta_k$.

c) Par double inclusion.

d) En passant aux dimensions : $\dim I_{k+1} = \dim I_{k+2} + \dim u(S) - \dim(I_{k+2} \cap S)$ d'où l'inégalité $i_{k+1} \leqslant i_{k+2} + \dim u(S)$, ou encore $\dim u(S) \geqslant \delta_{k+1}$.
Mais il y a une surjection linéaire de S sur $u(S)$, donc $\dim S \geqslant \dim u(S)$ et on a le résultat.

Partie B - Endomorphismes conjugués

5. On n'oublie pas : réflexivité, transitivité, symétrie (On avait déjà traité une question similaire dans un ancien DM).

6. La classe de Id_E est $\{\mathrm{Id}_E\}$, celle de 0 est $\{0\}$.

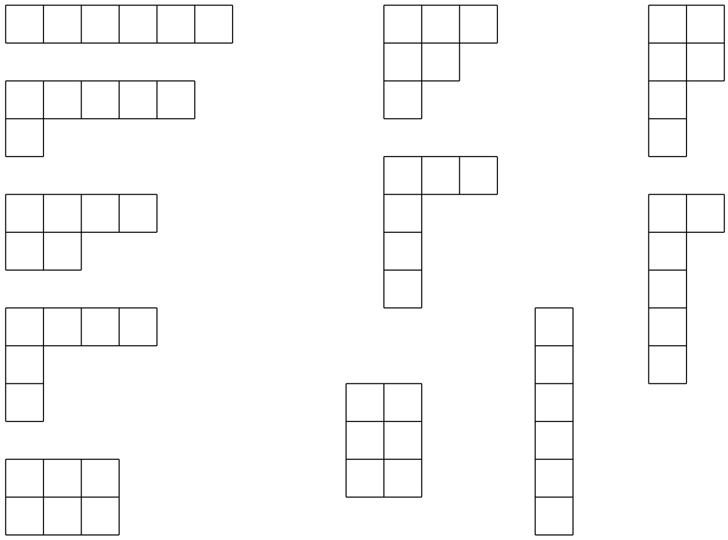
7. On part de $u \circ \varphi = \varphi \circ v$. Comme φ est surjective on a $\operatorname{rg} u \circ \varphi = \operatorname{rg} u$. Comme φ est injective on a $\operatorname{rg} \varphi \circ v = \operatorname{rg} v$.

8. On part de $u = \varphi \circ v \circ \varphi^{-1}$ et on élève à la puissance k. Les $\varphi^{-1} \circ \varphi$ dispersés dans le produit se simplifient et il reste $u^n = \varphi \circ v^n \circ \varphi^{-1}$.

9. Comme u^k et v^k ont le même rang, alors $u^k = 0 \Leftrightarrow v^k = 0$, d'où le résultat.

Partie C - Diagrammes de Young d'endomorphismes nilpotents

10. On en trouve 11 :



11. $I_0 = E$ et $I_r = \{0\}$ (r est l'indice de nilpotence de u).
Les $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{r-1}$ sont des entiers strictement positifs décroissantes, de plus leur somme vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \delta_k = \sum_{k=0}^{r-1} (i_k - i_{k+1}) = i_0 - i_r = n.$

12. On peut introduire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E, placer les e_k dans les cases du diagramme de Young $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ donné :

e_1	e_2	e_3	e_4
e_5	e_6		
e_7			

et décider que l'image par u d'un e_k est le $e_{k'}$ situé dans la case au dessus de celle de e_k, ou 0 si e_k est sur la première ligne.

13. Si u et v sont conjugués, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k et v^k aussi. Donc u^k et v^k ont le même rang et $i_k = i_{k'}$. Ce qui donne le résultat.

14. Les classes d'équivalence d'endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^6$ correspondent bijectivement aux diagrammes de Young à 6 cases, il y a 11 telles classes d'équivalence.