DS 9 – Corrigé

Exercice 1 - Un calcul de comatrice

- Le cofacteur (1,1) de B est $\det A$.
- Si $i > 1$, le mineur m_{ij} contient une ligne nulle, donc est nul.
- Si $j > 1$, le mineur m_{ij} contient une colonne nulle, donc est nul.

Par conséquent seul le coefficient (1,1) de $\operatorname{Com} B$ peut être non nul : $\operatorname{Com} B = \begin{pmatrix} \det A & & \\ & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - Formule de Stirling

1. On multiplie numérateur et dénominateur par les entiers pairs de 2 à $2n$:

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \boxed{\frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

2. Comme $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$, il vient :

$$u_n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi \times 2n}}{2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \boxed{\left(\frac{2n}{e}\right)^n \sqrt{2}}$$

Exercice 3 - Polynôme caractéristique d'une matrice

1. ***a)*** $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \boxed{x^n}$.

b) $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix} = \boxed{(x-1)^n}$.

c) $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première colonne.

Donc $\chi_M(x) = (x-1)[(x-2)(x-1)-1] - (x-1) = (x-1)(x^2-3x) = \boxed{x(x-1)(x-3)}$

2. Comme A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.
Alors, pour tout scalaire x :

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(xI_n - B) \\ &= \det(xP^{-1}P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(xI_n - A)P) \\ &= \det(P)^{-1} \times \det(xI_n - A) \times \det(P) \\ &= \det(xI_n - A) \\ &= \chi_A(x) \end{aligned}$$

3. ***a)*** L'endomorphisme f est de rang 1. D'après le théorème du rang, le noyau de f a donc pour dimension $n-1$. Donnons nous une base $\mathcal{F}_K = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\ker f$. Comme $\mathcal{F}_K$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$, on peut la compléter en une base $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ par le théorème de la base incomplète. Alors, par construction de $\mathcal{F}$, la matrice B est de la forme :

$$B = \operatorname{mat}_{\mathcal{F}} f = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

b) On a alors $\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x-b_n \end{vmatrix} = x^{n-1}(x-b_n)$

Comme A et B sont semblables, on a $\chi_A = \chi_B$. De plus, $b_n = \operatorname{tr}(B)$. Enfin, A et B étant semblables on a aussi $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$. D'où le résultat : $\forall x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \operatorname{tr}(A))$.

Exercice 4 - Produit de Cauchy de deux séries

1. ***a)*** $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} \overset{[j=k-i]}{=} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j$

b) $A_n \times B_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$

Comme tous les $a_i b_j$ sont positifs et comme tous les termes de la somme double C_n sont présents dans la somme double $A_n B_n$, on a bien $C_n \leqslant A_n B_n$.

c) Comme les séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, les suites (A_n) et (B_n) de leurs sommes partielles sont majorées. En notant M_A un majorant de (A_n) et M_B un majorant de (B_n), la question précédente implique que la suite (C_n) est majorée par $M_A M_B$. Mais alors la série à termes positifs $\sum c_n$ a la suite de ses sommes partielles majorée, donc elle converge.

d) On a $C_{2n} = \sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n-i} a_i b_j$.

Remarquons que cette somme double contient tous les termes $a_i b_j$ pour i, $j \in [\![0;n]\!]$.
Comme les $a_i b_j$ sont tous positifs, on a donc bien $A_n B_n \leqslant C_{2n}$.
On dispose donc de l'encadrement $C_n \leqslant A_n B_n \leqslant C_{2n}$ pour tout entier n. De plus, les suites (A_n), (B_n) et (C_n) convergent vers des limites réelles A, B et C (les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ étant convergentes). Alors, par théorème d'encadrement, on obtient bien $AB = C$.

2. ***a)*** D'après la question ***1*** appliquée aux séries à termes positifs $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$, la série $\sum d_n$ converge.

De plus, par inégalité triangulaire on a $|c_n| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i| \times |b_{n-i}| = d_n$. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |c_n|$ converge.
Donc la série $\sum c_n$ converge absolument, donc $\sum c_n$ converge.

b) Comme $A_n \times B_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$ et $C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j$, alors $A_n B_n - C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} a_i b_j$.

De même, $A'_n B'_n - C'_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=n-i+1}^{n} |a_i| \times |b_j|$.

Mais alors on obtient $|A_nB_n - C_n| \leqslant A'_nB'_n - C'_n$ en écrivant l'inégalité triangulaire.

c) D'après la question ***1***, on a $A'_nB'_n - C'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors, par théorème d'encadrement, $A_nB_n - C_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme A_n, B_n et C_n tendent respectivement vers A, B et C, on en déduit que $A \times B = C$.

3. ***a)*** On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum a_n$ converge absolument par critère de d'Alembert.

b) $c_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \times \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i y^{n-i}$

Donc $c_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!}$.

Comme $AB = C$, on en déduit bien $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$.

Remarque : En se souvenant que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (on avait démontré cette égalité en se servant d'une formule de Taylor avec reste intégral), on retrouve l'équation fonctionnelle de la fonction exponentielle : $e^x e^y = e^{x+y}$. La formule $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pourrait en fait constituer une *définition* de la fonction exponentielle. (On rappelle qu'en début d'année, nous avons admis l'existence de exp...)

c) Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ la n-ième somme partielle et montrons que les deux suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} \leqslant 0$ donc (S_{2n}) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2n+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} \geqslant 0$ donc (S_{2n+1}) est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{-1}{\sqrt{2n+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune ℓ. Donc (S_n) converge vers ℓ et $\sum a_n$ est bien une série convergente.

En revanche, $|a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{n^{1/2}}$. Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge, la série $\sum |a_n|$ est divergente par comparaison de séries à termes positifs. Donc $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

d) On a $c_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \times \frac{(-1)^{n-i}}{\sqrt{n-i+1}} = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x+1)(n-x+1) \leqslant (\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(n-\frac{n}{2}+1\right) = \frac{1}{4}(n+2)^2$ (par une étude rapide de fonction auxiliaire par exemple).

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{(i+1)(n-i+1)}} \geqslant \dfrac{2}{n+2}$ et donc $|c_n| \geqslant \dfrac{2(n+1)}{n+2} > 1$.

Par conséquent (c_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ diverge grossièrement.

L'implication ($\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent) $\Rightarrow \sum c_n$ converge est donc fausse. L'hypothèse d'absolue convergence est nécessaire.

Problème - Approximation uniforme et polynômes de Bernstein

1. La fonction $|f|$ est continue (comme composée de fonctions continues) sur le segment $[0;1]$. Par le théorème des bornes, elle est majorée et atteint un maximum.

2. La fonction $|f|$ atteint un maximum en un $x_0 \in [0;1]$, et la fonction $|\lambda f|$ atteint un maximum en ce même point x_0, avec $|\lambda f|(x_0) = |\lambda| \times |f|(x_0)$, d'où le résultat.

3. Soit $x \in [0;1]$. Par inégalité triangulaire on a $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $|f+g|$ sur $[0;1]$.
Donc $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

4. $P_{3,0} = -X^3+3X^2-3X+1$ $\qquad$ $P_{3,2} = -3X^3+3X^2$
$P_{3,1} = 3X^3-6X^2+3X$ $\qquad$ $P_{3,3} = X^3$

5. La famille $(P_{n,k})_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille étagée en valuations et contient $n+1$ polynômes (or on a $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$).

6. ***a)*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$ par la formule du binôme.

b) On a $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ par une formule bien connue et diversement nommée.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP_{n,k} = nX\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} = nX(X+1-X)^{n-1} = nX.$

c) Cette fois $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(k-1)\dbinom{n-1}{k-1} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_{n,k} = n(n-1)X^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}X^{k-2}(1-X)^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1)X^2.$

7. On a d'abord

$$\sum_{k=0}^{n} k^2P_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} kP_{n,k} = nX + n(n-1)X^2$$

Puis, en développant :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(X-\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(X^2-\frac{2k}{n}X+\frac{k^2}{n^2}\right)P_{n,k} \\
&= X^2\sum_{k=0}^{n}P_{n,k} - \frac{2}{n}X\sum_{k=0}^{n}kP_{n,k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2P_{n,k} \\
&= X^2 - \frac{2}{n}XnX + \frac{1}{n^2}(nX+n(n-1)X^2) \\
&= \frac{1}{n}X(1-X)
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
S_V(x) &= \sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right| P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \sum_{k\in V}\frac{1}{\sqrt{n}}P_{n,k}(x) && \text{par hypothèse sur } V \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}P_{n,k}(x) && \text{en ajoutant des termes positifs} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x) && \text{en factorisant} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} && \text{d'après la partie précédente}
\end{aligned}$$

9. Lorsque x, k et n vérifient $\left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, en multipliant par $\left|x-\frac{k}{n}\right|$ on a :

$$\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 > \frac{1}{\sqrt{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right| \text{ et donc } \left|x-\frac{k}{n}\right| < \sqrt{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_W(x) &= \sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right| P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \sqrt{n}\sum_{k\in W}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}(x) && \text{en ajoutant des termes positifs} \\
&\leqslant \sqrt{n}\times\frac{1}{n}x(1-x) && \text{d'après la partie précédente} \\
&= \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

10. La fonction polynomiale $x\mapsto x(1-x)$ atteint un maximum égal à $\frac{1}{4}$ en $x=\frac{1}{2}$.

On a donc $S(x)=S_V(x)+S_W(x)\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1/4}{\sqrt{x}}=\frac{5}{4\sqrt{n}}$.

11.

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{n,k}(x)=\frac{1}{n^2}(nx+n(n-1)x^2)=\frac{x(1+(n-1)x)}{n}$$

$$\text{et } B_n(f)(x)-f(x)=\frac{x(1+(n-1)x)}{n}-x^2=\frac{x(1-x)}{n}$$

$$\text{Donc } \|B_n(f)-f\|_\infty=\frac{1}{4n}$$

12.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P_{n,k}(x)-f(x)\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)=B_n(f)(x)-f(x)$$

13. ***a)*** La fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[0;1]$, elle est donc majorée d'après le théorème des bornes. En appelant C un majorant de $|f'|$, la fonction f est C-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis.

b) Comme f est C-lipschitzienne, on a

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant C\left|\frac{k}{n}-x\right|$$

Alors, par inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P_{n,k}(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{n,k}(x) \\
&\leqslant C\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|P_{n,k}(x) \\
&= C\times S(x) \\
&\leqslant \frac{5C}{4\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|B_n(f)-f\|_\infty \leqslant \dfrac{5C}{4\sqrt{n}}$ puis, par théorème d'encadrement, $\|B_n(f)-f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

14. ***a)*** La fonction f est continue sur le segment $[0;1]$. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. c'est-à-dire :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*,\forall(x,y)\in[0;1]^2\,,\ |x-y|\leqslant\eta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

b)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\in T}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P_{n,k}(x)\right| &\leqslant \sum_{k\in T}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \sum_{k\in T}\varepsilon P_{n,k}(x)=\varepsilon\sum_{k\in T}P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

c) Pour x, k, n fixés tels que $k\in U$:

Notons $M=\left\lfloor |x-\frac{k}{n}|/\eta\right\rfloor$, de sorte que $M\eta\leqslant\left|x-\dfrac{k}{n}\right|<(M+1)\eta$.

Notons $y_i=x+\dfrac{i}{M+1}$ pour tout $i\in[\![0;M+1]\!]$ (On a ainsi construit une subdivision $(\,y_0,y_1,\,\ldots,y_M\,)$ de $\left[x;\dfrac{k}{n}\right]$ de pas inférieur à η).

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{M}(f(y_{i+1})-f(y_i))\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{M}|f(y_{i+1})-f(y_i)| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{M}\varepsilon=(M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

Comme $M \leqslant \frac{1}{\eta}\left|x-\frac{k}{n}\right|$, on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{\eta}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\varepsilon$.
Substituons :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\in U}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P_{n,k}(x)\right| &\leqslant \sum_{k\in U}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{n,k}(x)\\
&\leqslant \sum_{k\in U}\left(1+\frac{1}{\eta}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\varepsilon P_{n,k}(x)\\
&= \varepsilon\sum_{k\in U}P_{n,k}(x)+\frac{\varepsilon}{\eta}\sum_{k\in U}\left|x-\frac{k}{n}\right|P_{n,k}(x)\\
&\leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)+\frac{\varepsilon}{\eta}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|P_{n,k}(x)\\
&= \varepsilon+\frac{\varepsilon}{\eta}S(x)\\
&\leqslant \varepsilon\left(1+\frac{5}{4\eta\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

d) En ajoutant les deux majorations précédentes il vient

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon\left(2+\frac{5}{4\eta\sqrt{n}}\right)$$

Or, $2+\frac{5}{4\eta\sqrt{n}}$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
Donc $2+\frac{5}{4\eta\sqrt{n}} \leqslant 3$ à partir d'un certain rang.

On a donc montré : pour tout $\varepsilon>0$, $\|B_n(f)-f\| \leqslant 3\varepsilon$ à partir d'un certain rang.
Ce qui permet de conclure : $\|B_n(f)-f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

15. On a vu que $\|B_n(f)-f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, pour n assez grand, le polynôme $P=B_n(f)$ vérifie $\|P-f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, ce qui démontre le théorème de Weierstrass.