DS 7 – Corrigé

Exercice 1 - Un peu de calcul

1. On a $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \boxed{1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}$

$$\text{et } \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)}$$

$$= 1-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3\right)+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3\right)^3+o(x^3)$$

$$= 1 \quad -\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^3 \quad +\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3 \quad -\frac{1}{8}x^3 \quad +o(x^3)$$

$$= \boxed{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^4)}$$

2. On remplace $\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ par $\mathrm{d}t$. On effectue au préalable un petit changement d'écriture :

$$\int_0^x \frac{\cos^3\theta}{4+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^x \frac{1-\sin^2\theta}{4+\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\sin x}\frac{1-t^2}{4+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Puis $= \int_0^{\sin x}\left(\frac{5}{4+t^2}-1\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{5}{2}\arctan\frac{t}{2}\ -t\right]_0^{\sin x} = \boxed{\frac{5}{2}\arctan\frac{\sin x}{2}\ -\sin x.}$

3. On a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ en posant $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

On reconnaît une somme de Riemann (associée à f et à une subdivision régulière de $[0;1]$ en n sous-intervalles).

Comme f est une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$, le théorème de convergence des sommes de Riemann assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$. On a ensuite :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \underbrace{\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}_{\text{forme } u'/2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x = -\left[\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

Exercice 2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $x\mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable d'après le théorème fondamental, de dérivée $x\mapsto e^{-x^2}$.

Donc son carré, la fonction f, est aussi dérivable et on a bien $\boxed{f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$

2. ***a)*** On calcule !

$$\Delta(h) = \frac{1}{h}\left(\int_0^1 \frac{e^{-(x+h)^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ -\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right)+\int_0^1(2x+h)e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

$$\Delta(h) = \int_0^1 \frac{e^{-(x+h)^2(1+t^2)}-e^{-x^2(1+t^2)}+(2hx+h^2)(1+t^2)e^{-x^2(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Or, $e^{-(x+h)^2(1+t^2)} = e^{(-x^2-2hx-h^2)(1+t^2)} = e^{-x^2(1+t^2)}\times e^{(-2hx-h^2)(1+t^2)}$

En factorisant $e^{-x^2(1+t^2)}$ au numérateur, il vient

$$\boxed{\Delta(h) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}\times\left(\frac{e^{(-2hx-h^2)(1+t^2)}-1-(-2hx-h^2)(1+t^2)}{h}\right)\mathrm{d}t}$$

b) Écrivons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$e^u = 1 + u + \int_0^u e^t(u-t)\,\mathrm{d}t \text{ donc } |e^u - 1 - u| = \left|\int_0^u e^t(u-t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^u e^t|u-t|\,\mathrm{d}t\right|$$

Or, sur l'intervalle $[0;u]$, on a $t \leqslant |u|$ donc $e^t \leqslant e^{|u|}$ (attention à bien prendre en compte que u peut être positif ou négatif !)

Mais alors $|e^u - 1 - u| \leqslant e^{|u|}\left|\int_0^u |u-t|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \boxed{e^{|u|} \times \dfrac{u^2}{2}.}$

c) On majore à grand renfort d'inégalités triangulaires.

$$\begin{aligned}
|\Delta(h)| &= \left|\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)} \times \left(\frac{e^{(-2hx-h^2)(1+t^2)} - 1 - (-2hx-h^2)(1+t^2)}{h}\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)} \times \frac{\left|e^{(-2hx-h^2)(1+t^2)} - 1 - (-2hx-h^2)(1+t^2)\right|}{|h|}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On emploie ensuite l'inégalité de la question précédente avec $u = (-2hx - h^2)(1+t^2)$.

$$|\Delta(h)| \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)} \times \frac{e^{|(-2hx-h^2)(1+t^2)|} \times {}^1\!/_2\left((-2hx-h^2)(1+t^2)\right)^2}{|h|}\,\mathrm{d}t$$

On utilise $1 + t^2 \leqslant 2$ puis on toilette un peu le résultat.

$$\begin{aligned}
|\Delta(h)| &\leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)} \times \frac{e^{2|(2hx+h^2)|} \times 2(2hx+h^2)^2}{|h|}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \ \times e^{2|(2hx+h^2)|} \times 2|2hx+h^2||2x+h| \\
&\leqslant \boxed{g(x) \times e^{2|2hx+h^2|} \times 2 \times |2x+h| \times |2hx+h^2|}
\end{aligned}$$

d) Le majorant à droite de l'inégalité précédente tend clairement vers 0 quand h tend vers 0. Par théorème d'encadrement, on en déduit $\Delta(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Comme $2x + h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2x$, on aboutit à

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On a bien trouvé le nombre dérivé $g'(x)$ comme limite du taux d'accroissement, et

$$\boxed{g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t}$$

3. Il suffit de montrer que $f' + g'$ est la fonction nulle.
Effectuons dans $g'(x)$ le changement de variable $u = xt$ (donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}u$) pour obtenir les mêmes bornes 0 et x que dans $f'(x)$.

$$g'(x) = -2x\int_0^x e^{-x^2\left(1+u^2/x^2\right)} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u = -2\int_0^x e^{-x^2} \times e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

On aboutit à $g'(x) = -f'(x)$ et on a donc bien $f' + g' = 0$.

4. Clairement, $\boxed{f(0)=0.}$ De plus, $g(0)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=[\arctan t]_0^1$ donc $\boxed{g(0)=\frac{\pi}{4}.}$

5. ***a)*** C'est une conséquence immédiate de $1+t^2\geqslant 1$.

b) Par positivité de l'intégrale, $g(x)$ est positif pour tout x.

De plus, $g(x)\leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}t=e^{-x^2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Par théorème d'encadrement on a donc $\boxed{g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.}$

6. On a pour tout x l'égalité $f(x)+g(x)=f(0)+g(0)=\dfrac{\pi}{4}$ (questions ***3*** et ***4***).

Donc $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-g(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\pi}{4}$ (question ***5b***).

Comme $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est positif pour x positif (positivité de l'intégrale), on en déduit

$$\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{f(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Problème - Étude d'une transformation fonctionnelle

1. Pour $x\in I$ on a $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{a}{1+t}\,\mathrm{d}t=[a\ln(1+t)]_0^x$. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} T(f) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & a\ln(x+1)\end{array}}$$

2. Pour $x\in I$ on a $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\times\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(\ln(1+t)\right)^2\right]_0^x$. Donc :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} T(f) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\ln^2(x+1)\end{array}}$$

3. On a cette fois $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+2)^2}\,\mathrm{d}t$. La fraction rationnelle intégrée se décompose après calcul en

$$\frac{t}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\frac{2}{(t+2)^2}$$

$$\text{D'où } T(f)(x)=\left[-\ln|t+1|+\ln|t+2|-\frac{2}{t+2}\right]_0^x$$

$$\boxed{T(f)(x)=\ln\frac{x+2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+1-\ln 2}$$

Posons $h=\dfrac{1}{x}$ et calculons un développement à l'ordre 2 quand h tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\ln\frac{x+2}{x+1}-\frac{2}{x+2}+1-\ln 2 &= \ln\frac{1/h+2}{1/h+1}-\frac{2}{1/h+2}+1-\ln 2\\ &= \ln\frac{1+2h}{1+h}-\frac{2h}{1+2h}+1-\ln 2\\ &= \ln\Big((1+2h)(1-h+h^2+o(h^2)\Big)-\frac{2h}{1+2h}+1-\ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln\left(1+h-h^2+o(h^2)\right) - 2h\left(1-2h+o(h)\right)+1-\ln 2 \\
&= (h-h^2) - \frac{1}{2}\left(h-h^2\right)^2 - 2h + 4h^2 + 1 - \ln 2 + o(h^2) \\
&= h - h^2 - \frac{1}{2}h^2 - 2h + 4h^2 + 1 - \ln 2 + o(h^2) \\
&= 1 - \ln 2 - h + \frac{5}{2}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{T(f)(x) = 1 - \ln 2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in I$:

$$T(f_{n+1})(x) + T(f_n)(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}+t^n}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n(t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{et donc } T(f_{n+1})(x) = -T(f_n)(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

En déroulant cette relation de récurrence,

$$\begin{aligned}
T(f_n)(x) &= -T(f_{n-1})(x) + \frac{x^n}{n} \\
&= T(f_{n-2})(x) - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} \\
&= -T(f_{n-3})(x) + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} \\
&= T(f_{n-4})(x) - \frac{x^{n-3}}{n-3} + \frac{x^{n-2}}{n-2} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} \\
&= \dots \\
&= (-1)^n T(f_0)(x) + (-1)^{n-1}\frac{x}{1} + (-1)^{n-2}\frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{T(f_n)(x) = (-1)^n\left(\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k}\right)}$$

5. • D'après le théorème fondamental, si $f \in E$ alors $T(f)$ est dérivable et de dérivée f. Donc $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et appartient donc à E.

Donc $T(f)$ est bien une application de E dans E.

• La linéarité de T résulte de la linéarité de l'intégrale : pour f, $g \in E$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$T(\lambda f + g)(x) = \int_0^x \frac{(\lambda f + g)(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \lambda\int_0^x \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{g(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

Donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ et on a bien $T \in \mathcal{L}(E)$.

• Montrons que $\ker T = \{0_E\}$.

Soit $f \in \ker T$, on a $T(f) = 0$. En dérivant, on a $T(f)' = 0$ et donc $\forall t \in I$, $\dfrac{f(t)}{t+1} = 0$.

Par conséquent f est la fonction nulle et $\boxed{\ker T = \{0_E\}.}$

• Montrons que $\operatorname{Im} T = \{g \in \mathcal{C}^1(I) \mid g(0) = 0\}$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $g \in \operatorname{Im} T$. Il existe $f \in E$ tel que $g = T(f)$. On a déjà dit que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En outre, $T(f)(0) = 0$, ce qui montre bien l'inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tel que $g(0) = 0$.

Posons $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I,\ f(t) = (1+t)g'(t)$. Alors f est continue comme produit de fonctions continues et on a pour $x \in I$: $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(1+t)g'(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = g(x) - g(0) = g(x)$. Donc $g = T(f)$ et on a bien $g \in \operatorname{Im} T$.

Finalement on a $\boxed{\operatorname{Im} T = \{g \in \mathcal{C}^1(I) \mid g(0) = 0\}.}$

6. $T(f)$ est dérivable avec pour tout $x \in I$: $T(f)'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1} > 0$.

Donc $\boxed{T(f) \text{ est strictement croissante.}}$

7. On commence par écrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $T(f)'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$:

$$T(f)'(x) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

Par primitivation de DL, on trouve (comme $T(f)(0) = 0$, le terme constant est nul) :

$$\boxed{T(f)(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}$$

La courbe représentative de $T(f)$ admet en 0 une tangente d'équation $y = x$ et est localement en dessous de sa tangente.

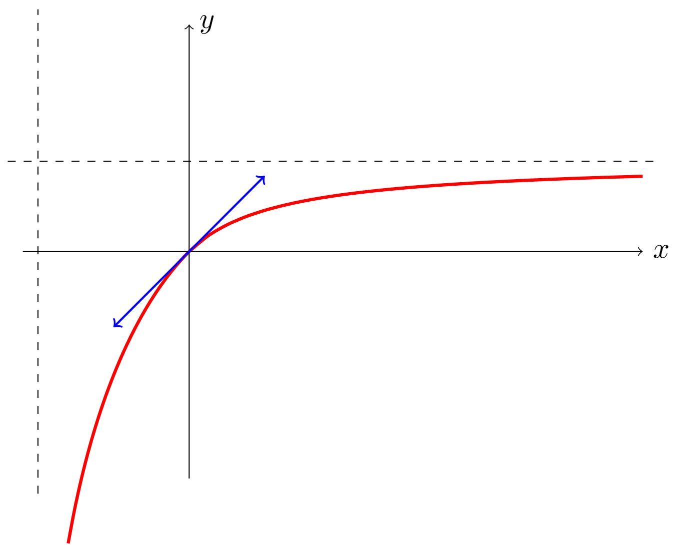
8. Pour $x \geqslant 0$: $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-t} \leqslant 1$.

Donc $T(f)$ est majorée par 1. Comme $T(f)$ est croissante, elle admet une limite finie en $+\infty$ par le théorème de convergence monotone.

9. Pour $x \in \,]0;1]$: $T(f)(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{\overbrace{e^{-t}}^{\geqslant 1}}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant -\int_x^0 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln(x+1) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

On en déduit $T(f)(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

10. Allure de la courbe de $T(f)$:



11. ***a)*** Comme f tend vers 0 en $+\infty$, il existe un $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant 1$.
La fonction f est donc bornée sur $[A; +\infty[$.
De plus, f continue est bornée sur le segment $[0; A]$ par le théorème des bornes.
Donc $\boxed{f \text{ est bornée sur } [0; +\infty[\,.}$

b) Remarquons d'abord que pour $x \geqslant 1$, on a $\ln x \leqslant x$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f tend vers 0 en $+\infty$, il existe un $A > 0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon$.
Posons $B = e^A$. Alors, pour tout $x \geqslant B$, on a $B \leqslant \ln x \leqslant x$ et donc $\forall t \in [\ln(x); x]\,, |f(t) \leqslant \varepsilon$.
Donc ε est un majorant de $|f|$ sur $[\ln(x); x]$ et on en déduit $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \varepsilon$.
On a montré : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in I$, $\forall x \geqslant B$, $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \varepsilon$.
C'est-à-dire $\boxed{\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

c) Soit $x \geqslant 1$. On découpe l'intégrale par relation de Chasles et on majore (inégalité triangulaire) :

$$\begin{aligned}
|T(f)(x)| &= \left|\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{\ln x} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\ln x}^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{\ln x} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \;+\; \left|\int_{\ln x}^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_0^{\ln x} \frac{|f(t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\ln x}^x \frac{|f(t)|}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mais $|f(t)| \leqslant M$ sur l'intervalle $[0; x]$ et $|f(t)| \leqslant \alpha(x)$ sur l'intervalle $[\ln(x); x]$. Donc

$$\boxed{|T(f)(x)| \leqslant M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \;+\; \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}$$

d) Les intégrales dans l'inégalité précédente peuvent être calculées explicitement et on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{|T(f)(x)|}{\ln x} &\leqslant \frac{M \ln(1+\ln x)}{\ln x} + \frac{\alpha(x)\,(\ln(1+x) - \ln(1+\ln x))}{\ln x} \\
&\leqslant M \frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x} + \alpha(x) \frac{\ln(1+x)}{\ln x}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(1+\ln x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{\ln(2\ln x)}{\ln x} = \dfrac{\ln 2}{\ln x} + \dfrac{\ln \ln x}{\ln x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.
De plus $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{\ln(2x)}{\ln x} = \dfrac{\ln 2}{\ln x} + 1 \to 1$ quand $x \to +\infty$.
Comme $\alpha(x)$ tend vers 0, le majorant de $\dfrac{|T(f)(x)|}{\ln x}$ tend vers 0 et, par théorème d'encadrement, $T(f)(x)/\ln x \to 0$ quand $x \to +\infty$.
Finalement on a bien $\boxed{T(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x).}$

12. En posant $g = f - \lambda$, on a par linéarité de T : $T(g) = T(f) - T(\lambda)$ (en écrivant encore λ la fonction constante de valeur λ).
Comme g tend vers 0 en $+\infty$, on a d'après la question ***11*** : $T(g) = \underset{+\infty}{o}(\ln)$.
De plus, $T(\lambda)$ est la fonction $x \mapsto \lambda \ln(x+1)$ d'après ***1***.

Donc $T(f)(x) = \lambda \ln(x+1) + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$. Puis $T(f)(x) = \lambda \ln x + \underbrace{\lambda \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)$.

Ce qui donne $\boxed{T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda \ln x.}$

13. Comme f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe un $A>0$ tel que $f(t) \geqslant 1$ pour tout $t \geqslant A$. Prenons alors un $x \geqslant A$ et minorons $T(f)(x)$:

$$T(f)(x) = \int_0^A \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_0^A \frac{f(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \underbrace{\int_A^x \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t}_{=\ln(x+1)-\ln(A+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc $\boxed{T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

14. ***a)*** Soit $x \geqslant 0$. On a par relation de Chasles puis majoration :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^{x/2} \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \ + \ \int_{x/2}^x \frac{e^t}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{x/2} e^{x/2}\,\mathrm{d}t \ + \ e^x \int_{x/2}^x \frac{1}{(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{2}e^{x/2} \ + \ e^x \left[\frac{1}{(n-1)(1+t)^{n-1}}\right]_{x/2}^x \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{x^{n-2}}{e^x} F_n(x) \ \leqslant \ \dfrac{x^{n-1}}{2e^{x/2}} \ + \ \dfrac{x^{n-2}}{n-1}\left(\dfrac{1}{(x/2+1)^{n-1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n-1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

On a bien $\boxed{F_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^{n-2}}\right).}$

b) En intégrant $F_n(x)$ par parties, on trouve

$$F_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} - 1 + nF_{n+1}(x)$$

Or les trois termes $\dfrac{e^x}{(x+1)^n}$, 1 et $F_{n+1}(x)$ sont des petits o de $\dfrac{e^x}{x^{n-1}}$.

On a donc bien $\boxed{F_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^{n-1}}\right).}$

c) On part de $T(f)(x) = F_1(x)$ et on intègre par parties trois fois (on peut se servir de la formule de la question ***b*** sans tout refaire). On trouve :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{e^x}{x+1} - 1 + F_2(x) \\ &= \frac{e^x}{x+1} - 1 + \frac{e^x}{(x+1)^2} - 1 + 2F_3(x) \\ &= \frac{e^x}{x+1} - 1 + \frac{e^x}{(x+1)^2} - 1 + 2\left(\frac{e^x}{(x+1)^3} - 1 + 3F_4(x)\right) \\ &= \frac{e^x}{x+1} + \frac{e^x}{(x+1)^2} + 2\frac{e^x}{(x+1)^3} - 4 + 6F_4(x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } T(f)(x) = e^x\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}\right)+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$$

Il ne reste plus qu'à calculer un $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de l'expression entre parenthèses, en commençant par poser $h = {}^1\!/_x$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+{}^1\!/_h}+\frac{1}{(1+{}^1\!/_h)^2}+\frac{2}{(1+{}^1\!/_h)^3} &= \frac{h}{1+h}+\frac{h^2}{(1+h)^2}+\frac{2h^3}{(1+h)^3}\\
&= \frac{h}{1+h}+\frac{h^2}{1+2h+o(h)}+\frac{2h^3}{1+o(1)}\\
&= h(1-h+h^2+o(h^2))+h^2(1-2h+o(h))+2h^3(1+o(1))\\
&= h-h^2+h^3+h^2-2h^3+2h^3+o(h^3)\\
&= h+h^3+o(h^3)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{T(f)(x) = \frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)}$$