Éléments pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier).
On veut étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Définition. Un intervalle I est dit *stable par* f lorsque $f(I) \subset I$.

Trouver des intervalles stables est intéressant : cela permet de situer les termes de la suite (u_n) (et accessoirement montrer qu'elle est bien définie, si f est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier !), grâce à la proposition suivante, qui se montre par récurrence immédiate :

Proposition. Si I est un intervalle stable par f et si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$$

Définition. Un réel x est appelé un *point fixe de* f lorsque $f(x) = x$.

Les points fixes sont intéressants parce qu'ils sont, *sous certaines hypothèses*, les seules limites possibles de la suite :

Proposition. Si f est une fonction continue sur un intervalle stable I et si (u_n) tend vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de I ou ℓ est une borne exclue de I.

Démonstration. Si $\ell \in I$, on écrit $u_{n+1} = f(u_n)$ et on passe à la limite. Grâce à la continuité de f, on obtient $\ell = f(\ell)$. Si $\ell \notin I$ et si $I = \,]a;b[$ (par exemple), alors on a $a < u_n < b$ pour tout n et par passage à la limite il vient $a \leqslant \ell \leqslant b$, donc $\ell = a$ ou $\ell = b$.

$\square$

Attention ! La continuité de f est indispensable...
Attention (bis) ! La suite peut aussi tendre vers une borne de I. Par exemple, pour $u_0 = 1$, $I = \,]0;+\infty[$ et $f : x \mapsto x + 1$, la suite ne tend pas vers un point fixe de f mais vers $+\infty$.

On peut rechercher les points fixes de f en recherchant les zéros de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Le signe de g nous renseigne aussi sur la monotonie de la suite puisque $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
Un tableau de variations de f dans lequel figure ces points fixes peut aussi nous donner des informations sur les intervalles stables. Il peut donc être utile de dresser un tableau contenant simultanément le signe de g et les variations de f.

La monotonie de f nous donne aussi des informations sur la monotonie de (u_n) :

Proposition. Si f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Sa monotonie est donnée par ses deux premiers termes.

Démonstration. Par récurrence immédiate. Comme $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ on a :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u_1 \ \Rightarrow\ u_1 \leqslant u_2 \ \Rightarrow\ \ldots \ \Rightarrow\ u_n \leqslant u_{n+1} \ \Rightarrow\ \ldots \\[2ex] u_0 \geqslant u_1 \ \Rightarrow\ u_1 \geqslant u_2 \ \Rightarrow\ \ldots \ \Rightarrow\ u_n \geqslant u_{n+1} \ \Rightarrow\ \ldots \end{cases}$$

$\square$

Attention, on peut très bien avoir f croissante et (u_n) décroissante ! Exemple : $f : x \mapsto x-1$.

Pour une fonction décroissante c'est un peu plus compliqué :

Proposition. Si f est décroissante alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, avec des sens de variation opposés.

Proposition. La fonction $f \circ f$ est croissante et on a $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = (f \circ f)(u_{2n+1})$. Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. De plus, en composant par f décroissante :

$$\begin{cases} u_0 \leqslant u_2 & \Rightarrow \quad u_1 \geqslant u_3 \\ u_0 \geqslant u_2 & \Rightarrow \quad u_1 \leqslant u_3 \end{cases}$$

Dans cette situation où f est décroissante, il arrivera souvent (mais pas toujours) que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient deux suites adjacentes et qu'elles convergent donc vers une limite commune, qui sera aussi la limite de (u_n).

Exemple 1. Étudier (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$$

• On vérifie aisément que $]0;+\infty[$ est stable par $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$, donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout entier n on a $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^3}{1+u_n^2} < 0$ donc (u_n) décroît strictement.

• La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$.

En partant de la relation de récurrence et en passant à la limite on a $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, ce qui donne $\ell = 0$.

Finalement $\boxed{u_n \longrightarrow 0}$

Exemple 2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Étudier (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n^2}\right) \end{cases}$$

• En posant $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a^2}{x}\right)$, on constate que $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f. Par conséquent $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout n.

• Posons $g(x) = f(x) - x$. Après calcul on a $g(x) = \dfrac{(a-x)(a+x)}{2x}$. Dressons un tableau combiné du signe de g et des variations de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

• On voit que l'intervalle $[a;+\infty]$ est stable par f. De plus, $f(\,]0;a[\,) \subset [a;+\infty]$, donc u_n appartient à $[a;+\infty]$ à partir du rang 1 si $u_0 < a$, et à partir du rang 0 si $u_n \geqslant a$.

• La fonction g est négative sur $[a;+\infty]$, donc (u_n) décroît (à partir du rang 0 ou 1...). Étant décroissante et minorée, elle converge, et sa seule limite possible est l'unique point fixe a de f.

Finalement $\boxed{u_n \longrightarrow a}$

Exemple 3. Étudier (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left(u_n^2 + 8\right) \end{cases}$$

• Il est clair que $u_n \geqslant 0$ pour tout n.

• Posons $f : x \mapsto \dfrac{1}{6}\left(x^2+8\right)$ et $g : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{1}{6}\left(x^2 - 6x + 8\right) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$. Une étude rapide donne :

x	0		2		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$4/3$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f a deux points fixes : 2 et 4, et les intervalles $[0;2]$, $[2;4]$ et $[4;+\infty[$ sont stables.

Comme f est croissante, la suite (u_n) est monotone. On distingue plusieurs cas selon la position de u_0.

• Si $u_0 \in [0;2]$ alors $u_n \in [0;2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme g est positive sur cet intervalle, la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par 2, elle converge. Sa limite est l'un des points fixes, comme $u_n \leqslant 2$ la seule limite possible est 2.

Finalement $\boxed{u_n \longrightarrow 2}$

• Si $u_0 \in [2;4[$ alors $u_n \in [0;4[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme g est négative sur cet intervalle, la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 2, elle converge. Sa limite est l'un des points fixes, comme $u_n \geqslant 2$ la seule limite possible est 2.

Finalement $\boxed{u_n \longrightarrow 2}$

• Si $u_0 = 4$ alors (u_n) est constante égale à 4 et on a bien sûr $\boxed{u_n \longrightarrow 4}$

• Si $u_0 \in \,]4;+\infty[$ alors $u_n \in \,]4;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme g est positive sur cet intervalle, la suite (u_n) est croissante. Comme $u_n \geqslant u_0 > 4$, elle ne peut pas converger vers l'un des points fixes 2 ou 4.

Finalement $\boxed{u_n \longrightarrow +\infty}$

Remarque :

▷ Supposons que a soit un point fixe de f tel que le signe de g au voisinage de a ait l'allure suivant :

$+$	0	$-$

Alors

→ Si u_n est inférieur à a, alors (u_n) se rapproche de a en croissant.

→ Si u_n est supérieur à a, alors (u_n) se rapproche de a en décroissant.

Dans cette situation on dit que a est un *point fixe attractif.*

▷ Supposons que a soit un point fixe de f tel que le signe de g au voisinage de a ait l'allure suivant :

$-$	0	$+$

Alors

→ Si u_n est inférieur à a, alors (u_n) s'éloigne de a en décroissant.

→ Si u_n est supérieur à a, alors (u_n) s'éloigne de a en croissant.

Dans cette situation on dit que a est un *point fixe répulsif.*

Dans l'exemple 2, le point fixe a était attractif.

Dans l'exemple 3, le point fixe 2 est attractif et le point fixe 4 est répulsif.

Exemple 4. Étudier (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n \end{cases}$$

• L'intervalle $[0;1]$ est stable par cos. De plus cos est décroissante sur cet intervalle. On pose $f = \cos\circ\cos$ et on s'intéresse aux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui vérifient $u_{2n+2} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f(u_{2n+1})$.

• La fonction $f = \cos\circ\cos$ est croissante sur $[0;1]$, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Comme $u_2 = \cos\cos 1 \leqslant u_0$, la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.

Par l'étude de $g : x \mapsto f(x) - x$, on vérifie (on abrège, il faudrait développer !) que f a un unique point fixe α dans $[0;1]$, qui est aussi le point fixe de cos. Il vaut environ $\alpha \simeq 0{,}739$.

On dresse les tableaux de signe de g et de variations de f :

x	0		α		1
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x) = \cos\cos x$	$\cos 1$	↗	α	↗	$\cos\cos 1$

• L'intervalle $[0;\alpha]$ est stable par $f = \cos\circ\cos$ et contient $u_1 = \cos 1$, donc il contient tous les u_{2n+1}. Comme (u_{2n+1}) est croissante et majorée, elle converge. Sa limite ne peut qu'être le point fixe α.

• L'intervalle $[\alpha;1]$ est stable par $f = \cos\circ\cos$ et contient $u_0 = 1$, donc il contient tous les u_{2n}. Comme (u_{2n}) est décroissante et minorée, elle converge. Sa limite ne peut qu'être le point fixe α.

Finalement la suite (u_n) converge et on a $\boxed{u_n \longrightarrow \alpha}$

(On remarque que les suites extraites d'indices pairs et impairs sont adjacentes.)