Procédés sommatoires de séries divergentes

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à coefficients complexes.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Définition : On appelle *procédé sommatoire* tout couple (E, S), dans lequel E est une partie de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $S : E \to \mathbb{C}$ est une application, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) **Axiome de prolongement**. On a $\mathcal{C} \subset E$ et pour tout $u \in \mathcal{C}$, $S(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Autrement dit S est un prolongement de la sommation habituelle des séries convergentes.

(ii) **Axiome de linéarité**. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et S est linéaire.

(iii) **Axiome de stabilité**. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, si on appelle v la suite translatée vers la droite (définie par $v_0 = 0$ et $v_n = u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$), alors on a $v \in E$ et $S(u) = S(v)$.

Si (E, S) est un procédé sommatoire, alors une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ pour laquelle $u \in E$ sera appelée une série *sommable au sens de* S, ou encore S*-sommable*. Le scalaire $S(u)$ sera aussi noté $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{S}}} u_n$.

Question. Montrer que si u est S-sommable, alors $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{S}}} u_n = u_0 + \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{S}}} u_{n+1}$.

1 Un exemple : Sommation de Cesàro

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ une série. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la n-ième somme partielle.
On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ est sommable au sens de Cesàro si $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$ converge quand $n \to +\infty$.
Dans ce cas, on pose $C(u) = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{C}}} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k$.
On note E l'ensemble des suites u telles que $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ soit sommable au sens de Cesàro.

Remarquons que si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est une série convergente de somme S, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Le théorème de Cesàro affirme alors que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. On a donc $u \in E$ et $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{C}}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$: le couple (E, C) vérifie l'axiome de prolongement.

Question. Montrer que (E, C) est un procédé sommatoire (c'est-à-dire qu'il vérifie aussi les axiomes de linéarité et de stabilité).

Question. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ est Cesàro-sommable et calculer $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{C}}}(-1)^n$.
Étudier la Cesàro-sommabilité de $\sum_{n\geqslant 0} 1$, $\sum_{n\geqslant 0} n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\sin(n)$.

2 Un deuxième exemple : Sommation d'Abel

On dit qu'une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est Abel-sommable si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tout $x \in [0;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est convergente.

(b) L'application $x \in [0;1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ a une limite finie quand x tend vers 1^-.

Quand les propriétés (a) et (b) sont vérifiées, on note $A(u) = \underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{A}}} u_n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
On note E l'ensemble des suites u telles que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est Abel-sommable.

Question. Justifier que (E, A) vérifie les axiomes de linéarité et de stabilité.

L'axiome de prolongement est plus difficile à démontrer...

Question. Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n. Pour x réel et sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

a) Justifier que $f(x)$ est défini pour tout $x \in [0;1]$.

b) Pour $x \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'identité

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k (x-1) + R_n x^{n+1}$$

c) En déduire :

$$f(x) - f(1) = \sum_{k=0}^{n} u_k (x^k - 1) + (x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n (x^{n+1} - 1)$$

d) On fixe un $\varepsilon > 0$. Justifier qu'à partir d'un certain rang on a $|R_n| \leqslant \varepsilon$.

e) En déduire que pour $x \in [0;1[$ suffisamment proche de 1, $|f(x) - f(1)| \leqslant 3\varepsilon$.

f) Montrer finalement que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est Abel-sommable et que $\underset{n=0}{\overset{+\infty}{\mathrm{A}}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Le couple (E, A) est donc bien un procédé sommatoire.

Question. Étudier l'Abel-sommabilité et calculer, le cas échéant :

$$\operatorname*{A}_{n=0}^{+\infty}(-1)^n, \qquad \operatorname*{A}_{n=0}^{+\infty} 1, \qquad \operatorname*{A}_{n=0}^{+\infty} n, \qquad \operatorname*{A}_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n, \qquad \operatorname*{A}_{n=0}^{+\infty} \sin(n)$$

3 Séries presque convergentes

Une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est dite *totalement divergente* si aucun procédé sommatoire n'est capable de la sommer. Elle est dite *presque convergente* si elle est sommable par au moins un procédé sommatoire, et si elle a la même somme pour tous les procédés capables de la sommer.

Question. Soit $q \in \mathbb{C}$. Montrer que la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ est :

- totalement divergente si $q = 1$.
- presque convergente si $q \neq 1$.