Quelques techniques d'intégration

Table des matières

---

*Les techniques des parties **1** et **2** sont classiques et utilisées fréquemment.*

*Les techniques de la partie **3** sont données à titre de curiosité et ne sont pas exigibles. Les exercices de cette partie constituent toutefois un bon entraînement aux changements de variable. Selon sa motivation on peut sauter complètement la partie **3**, la parcourir rapidement ou plus en profondeur et tester quelques exemples.*

---

1 Polynôme - exponentielle - fonction trigonométrique

1.1 Polynôme - exponentielle : $P(x)e^{\alpha x}$

Pour calculer $\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ où P est un polynôme, on dispose de deux méthodes :

▷ Abaisser par intégrations par parties successives le degré de P.

▷ On conjecture qu'une primitive est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q un polynôme de même degré que P, dont on détermine les coefficients par résolution d'un système (Méthode à préférer dès que P est de degré 3 ou plus).

Exercice 1. Primitive de $x \mapsto (x^2 - x + 3)e^{2x}$ puis de $x \mapsto (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}$.

1.2 Polynôme - fonction trigonométrique : $P(x)\cos(\beta x)$ ou $P(x)\sin(\beta x)$

▷ Première méthode : abaisser par intégrations par parties successives le degré de P. Cette méthode est en général la plus commode lorsque le degré de P est au plus 2.

▷ Deuxième méthode : on conjecture qu'une primitive est de la forme $x \mapsto A(x)\cos(\beta x) + B(x)\sin(\beta x)$ avec A et B de degré inférieur ou égal à celui de P, dont on détermine les coefficients par identification et résolution de système. Cette méthode est en général la plus commode lorsque le degré de P est au moins 3.

▷ Troisième méthode : calculer $\int P(x)e^{i\beta x}\,\mathrm{d}x$ et garder la partie réelle ou imaginaire du résultat.

Exercice 2. Primitive de $x \mapsto (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x$, puis de $x \mapsto x^3 \cos x$.

1.3 Exponentielle - fonction trigonométrique : $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Il vaut mieux dans tous les cas passer par l'exponentielle complexe : on calcule $\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,\mathrm{d}x$ et on conserve la partie réelle ou imaginaire du résultat.

1.4 Cas général : $P(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $P(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Les calculs d'intégration par parties devenant inamicaux, le plus commode est de passer par l'exponentielle complexe. On calcule $\int P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\,\mathrm{d}x$ et on conserve la partie réelle ou imaginaire du résultat.

Exercice 3. Primitive de $x \mapsto (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin x\, e^x$, puis de $x \mapsto x^3 \cos x\, e^{2x}$.

1.5 Polynôme - logarithme $P(x)\ln x$

Une intégration par parties donne $\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$ en une étape :

$$\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x\right] - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x\right] - \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right] \text{ si } \alpha \neq 1$$

$$\text{et } \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right] \text{ sinon.}$$

2 Fractions rationnelles

On cherche dans cette section à calculer $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, où $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est un quotient de deux polynômes.

2.1 Remarque préalable : fractions impaires

Si F est une fraction rationnelle impaire, alors elle peut s'écrire $F(x) = x\dfrac{A(x^2)}{B(x^2)}$.

On a alors intérêt à commencer par un changement de variable $u = x^2$ pour se ramener au calcul de $\displaystyle\int \frac{A(u)}{B(u)}\,\mathrm{d}u$. On a ainsi abaissé les degrés des numérateur et dénominateur et facilité les calculs ultérieurs.

2.2 Éléments simples de première espèce

Les éléments simples de première espèce sont de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{(x-a)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, il s'agit donc de calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$.

▷ Si $n = 1$, une primitive est $x \mapsto \ln|x-a|$ sur tout intervalle où $x \neq a$.

▷ Si $n > 1$, une primitive est $x \mapsto \dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}$ sur tout intervalle où $x \neq a$.

2.3 Éléments simples de seconde espèce

Les éléments simples de première espèce sont de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^n}$, avec $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Première étape :** Si $\lambda \neq 0$, on se débarrasse du terme λx en faisant apparaître au numérateur la dérivée de ax^2+bx+c :

$$\frac{\lambda x + \mu}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{\lambda}{2a} \times \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + \left(\mu - \frac{\lambda b}{2a}\right) \times \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

La fraction $\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$, de primitive $\ln|u|$ ou $\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$ selon n.

Il reste à calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$.

▷ **Deuxième étape :** Le trinôme s'écrit sous forme canonique $ax^2+bx+c = \dfrac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$.

On effectue un changement de variable affine $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ pour se ramener au calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

▷ Pour $n = 1$, une primitive est $\arctan t$.

▷ Pour $n > 1$, on peut effectuer le changement de variable $\theta = \arctan t$ pour se ramener à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}} = \int \cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

2.4 Décomposition en éléments simples

Soit une fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Supposons que $Q(x)$ se factorise en $Q(x) = Q_1^{n_1}(x)Q_2^{n_2(x)} \dots Q_p^{n_p}(x)$, où chaque Q_i est un facteur irréductible (de degré 1, ou de degré 2 à discriminant strictement négatif).

Alors $F(x)$ se décompose en une somme :

▷ D'un polynôme non nul de degré $\deg P - \deg Q$ si ce nombre est positif, ou nul sinon.

▷ Pour chaque Q_i de degré 1, d'éléments simples de première espèce $\dfrac{\lambda}{Q_i^k(x)}$, pour tous les $1 \leqslant k \leqslant n_i$.

▷ Pour chaque Q_i de degré 2, d'éléments simples de seconde espèce $\dfrac{\lambda x + \mu}{Q_i^k(x)}$, pour tous les $1 \leqslant k \leqslant n_i$.

Exercice 4. Primitive de $x \mapsto \dfrac{x^5}{x^3(x+1)}$, de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$ puis de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^5 - x^5 - 1}$.

3 Fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles

3.1 Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

Pour calculer $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, où $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$ (P et Q étant des polynômes à deux variables), on passe le plus souvent par un changement de variable qui nous ramène à une fraction rationnelle.

On peut toujours prendre $u = \tan \dfrac{x}{2}$ et on a alors :

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Ce changement de variable introduit toutefois des discontinuités parasites, nécessitant parfois un discours de recollement, et les fractions rationnelles obtenues ont des numérateurs et des dénominateurs qui tendent à avoir des degrés élevés, rendant le calcul fastidieux.

On a donc intérêt lorsque cela est possible à trouver un chemin plus astucieux.

3.1.1 Cas particulier : $\sin^p x \cos^q x$

▷ Si p est impair, on peut faire le changement de variable $u = \cos x$. Exemple :

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \,\mathrm{d}x \underset{u=\cos x}{=} \int -(1-u^2)^2 u^4 \,\mathrm{d}u$$

▷ Si q est impair, on peut faire le changement de variable $u = \sin x$. Exemple :

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int u^4(1-u^2)\,\mathrm{d}u$$

▷ Si p et q sont tous les deux impairs, on peut faire l'un ou l'autre de ces deux changements de variable, il est préférable de choisir celui correspondant à l'exposant le plus petit.

▷ Si p et q sont tous les deux pairs, on remplace $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ par $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ et $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et on recommence.

▷ Dans tous les cas on peut de toute façon préférer linéariser l'expression dès le départ.

Exercice 5. Terminer le calcul d'une primitive de $x \mapsto \sin^4 x \cos^3 x$, puis déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos^4 x$.

3.1.2 Cas général

Le meilleur changement de variable est donné par les « règles de Bioche ».

On note $\omega(x) = R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ l'expression à intégrer (y compris le $\mathrm{d}x$: $\omega(x)$ n'est pas un vrai nombre mais une expression formelle).

▷ Si $\omega(-x) = \omega(x)$, on fait le changement de variable $u = \cos x$.

▷ Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on fait le changement de variable $u = \sin x$.

▷ Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on fait le changement de variable $u = \tan x$.

▷ Si deux des trois relations précédentes sont vraies (et alors la troisième l'est aussi), on fait le changement de variable $u = \cos(2x)$.

▷ Sinon il ne reste que $u = \tan \dfrac{x}{2}$.

On peut parfois appliquer avec succès les règles de Bioche pour le calcul de $\displaystyle\int F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ alors que F n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 6. Ensemble de définition et calcul des primitives de :

- $x \mapsto \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.
- $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{2 + \cos x}$.
- $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x(\sin x - \cos x)}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{a + \cos x}$, où $a \in \left]1; +\infty\right[$.

3.2 Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}$

Le bon changement de variable est $u = e^{\alpha x}$ et on se ramène à une fraction rationnelle.

On peut parfois appliquer avec succès ce changement de variable pour le calcul de $\displaystyle\int F(e^x)\,\mathrm{d}x$ alors que F n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 7. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(e^x + 2)^2}$ puis de $x \mapsto \sqrt{e^x + 1}$.

3.3 Fonctions rationnelles en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$

Pour calculer $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x$, où $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = \dfrac{P(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}{Q(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}$ est une fonction rationnelle en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, on a deux grandes méthodes à considérer.

▷ On regarde l'intégrale $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ associée, où on a remplacé les fonctions hyperboliques par des fonctions circulaires. On détermine le meilleur changement de variable :

$$u = \cos x, \quad u = \sin x, \quad u = \tan x, \quad u = \cos(2x), \quad u = \tan\frac{x}{2}$$

On décide alors de faire le changement de variable hyperbolique correspondant :

$$u = \operatorname{ch} x, \quad u = \operatorname{sh} x, \quad u = \operatorname{th} x, \quad u = \operatorname{ch}(2x), \quad u = \operatorname{th}\frac{x}{2}$$

▷ On peut aussi tout simplement remplacer $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ par $\dfrac{e^x \pm e^{-x}}{2}$ et se ramener à une fonction rationnelle en e^x. Le changement de variable est plus rapide, mais les calculs ultérieurs seront parfois plus longs, avec une fraction rationnelle dont les numérateurs et dénominateurs auront des degrés plus élevés.

Exercice 8. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x(2\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{ch}^3 x)}$ puis de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x(2 + \operatorname{sh}^2 x)}$.

3.4 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{ax+b/cx+d}$

On veut calculer $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$, avec $n \geqslant 2$ un entier, a, b, c et d des réels tels que $ad - bc \neq 0$ (sinon la fraction se simplifie).

▷ Le bon changement de variable est $u = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, ou réciproquement $x = \dfrac{du^n - b}{-cu^n + a}$, et on se ramène à une fraction rationnelle.

▷ Remarquer que cette méthode permet de traiter les fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{ax+b}$ (pour lesquelles $c = 0$ et $d = 1$).

Exercice 9. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ (tout exprimer en fonction de $\sqrt[6]{x}$), puis de $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{(1-x)^3}}$.

3.5 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

On veut calculer $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, où a, b et c sont des réels et a est non nul (sinon on se ramène à la section précédente). On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ se factorise en $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et la racine carrée disparaît, ce cas est trivial. On distingue plusieurs cas non triviaux et on commence par écrire ax^2+bx+c sous forme canonique.

▷ **Cas 1 :** Si $a > 0$ et $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c = \dfrac{-\Delta}{4a}\left(1 + \left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right)$.

On commence par un changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$ et on se ramène à $\displaystyle\int S\left(t, \sqrt{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle.

On effectue ensuite le changement $\varphi = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \operatorname{argsh} t$. On arrive alors à $\displaystyle\int T(\operatorname{sh}\varphi, \operatorname{ch}\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ où T est une fonction rationnelle et on est ramené à une forme connue.

Exercice 10. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

▷ **Cas 2 :** Si $a < 0$ et $\Delta > 0$, alors $ax^2+bx+c = \dfrac{-\Delta}{4a}\left(1 - \left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right)$.

On commence par un changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ et on se ramène à $\displaystyle\int S\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle.

On effectue ensuite le changement $\theta = \arcsin t$. On arrive alors à $\displaystyle\int T(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ où T est une fonction rationnelle et on est ramené à une forme connue.

Exercice 11. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \sqrt{x - x^2}$.

▷ **Cas 3 :** Si $a > 0$ et $\Delta > 0$, alors $ax^2+bx+c = \dfrac{\Delta}{4a}\left(\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right)$.

On commence par un changement de variable $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ et on se ramène à $\displaystyle\int S\left(t, \sqrt{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$, où S est une fonction rationnelle.

On effectue ensuite le changement $\varphi = \ln\left(\varepsilon t + \sqrt{t^2-1}\right)$ où $\varepsilon = 1$ si $t > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $t < 0$. On a réciproquement $t = \varepsilon\operatorname{ch}\varphi$ et $\sqrt{t^2-1} = \operatorname{sh}\varphi$. On arrive alors à $\displaystyle\int T(\operatorname{sh}\varphi, \operatorname{ch}\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ où T est une fonction rationnelle et on est ramené à une forme connue.

Exercice 12. Ensemble de définition et calcul des primitives de $x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

▷ Le cas $a < 0$ et $\Delta < 0$ ne se présente pas puisqu'alors ax^2+bx+c est partout strictement négatif.

4 Intégration par astuce : quelques exemples

4.1 Trouver le bon changement de variable

Exercice 13. Calculer les primitives (la variable est x) :

a) $\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

4.2 Trouver la bonne intégration par parties

Exercice 14. Calculer les primitives (la variable est x) :

a) $\arctan\dfrac{x+1}{x-2}$

b) $\cos x \ln(1+\cos x)$

c) $x^3 e^{-x^2}$

d) $\dfrac{x}{\cos^2 x}$

e) $x^2\ln(x^6-1)$

f) $(1+x^2)\arctan x$

4.3 Changement de variable : échange de bornes

Exercice 15. Calculer les intégrales :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan e^x\,\mathrm{d}x$

4.4 Utilisation d'une intégrale auxiliaire

Exercice 16. Calculer les intégrales :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$

5 Exercices de synthèse

Exercice 17. Calculer les primitives (la variable est x) ou les intégrales :

1) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

3) $(x^2+1)\cos x e^x$

4) $(x^2-x+1)\sin x$

5) $\ln(1+x^2)$

6) $(x^3-1)\operatorname{ch} x$

7) $e^{\sqrt{2x+1}}$

8) $\dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(x^\alpha+1)^2}$

9) $\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

10) $\dfrac{1}{e^x+1}$

11) $\sqrt[3]{e^x-1}$

12) $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$

13) $\dfrac{1}{(x^2+x+1)^2+1}$

14) $\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$

15) $\dfrac{\tan x}{1+\cos x}$

16) $\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$

17) $\dfrac{1}{\sin x\sqrt{1+\sin x}}$

18) $\dfrac{1}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$

19) $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^4 x\operatorname{ch}^4 x}$

20) $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^5 x}$

21) $\dfrac{\operatorname{ch}(3x)}{1+\operatorname{sh} x}$

22) $\dfrac{1}{(1+e^{\alpha x})^2}$

23) $\dfrac{2+x}{1+x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

24) $\dfrac{x^2}{(2-x^3)\sqrt{1-x^3}}$

25) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$

26) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}$

27) $\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$

28) $\dfrac{1}{(4x-x^2)^{3/2}}$

29) $\dfrac{1}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

30) $\dfrac{1}{(1+x^2)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$

31) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^\alpha+x^{2\alpha}}}$

32) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

33) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$

34) $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}}$

35) $\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

36) $\dfrac{1}{\sqrt{4-(e^x+1)^2}}$

37) $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\ln x$

38) $\displaystyle\int_{1/4}^{1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$

39) $\displaystyle\int_{-k}^{k}\ln\left(\sqrt{k-x}+\sqrt{k+x}\right)\mathrm{d}x$

40) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

41) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

42) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2-x+1}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$

43) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$

44) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1+x\ln(x^2+1)}{x^4-x^2+1}\,\mathrm{d}x$

45) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}\,\mathrm{d}x$