13. Oraux – Thèmes de première année

☆☆☆☆	Exercice d'application simple
★☆☆☆	Petit échauffement tranquille
★★☆☆	Encore très abordable
★★★☆	Mérite réflexion
★★★★	Exercice bien énervé
♥	Basique à maîtriser quasi par cœur
💡	Exercice standard / super classique
✎	Solution longue, il faut s'accrocher
💻	Contient du PYTHON

— Polynômes —

Exercice 1 ★★★☆ *Mines 2025 – Arthur*

Exercice 2
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ dont toutes les racines ont une partie imaginaire strictement négative. On note $P_1 = \mathrm{Re}(P)$ et $P_2 = \mathrm{Im}(P)$ les polynômes à coefficients réels tels que $P = P_1 + iP_2$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|P(z)| = |P(\bar{z})|$.
2. Montrer que les racines de P_1 et P_2 sont toutes réelles.

Commentaire : Exercice 2 facile, le 1 un peu moins. L'examinatrice était plus intéressée par ma ponctualité que par mes résultats, elle n'a parlé que de ça.

Exercice 2 ★★☆☆ *Telecom 2025 – Heyman*

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\varphi(P) = P - P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-ce un automorphisme ?
3. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0\}$.
   E est-il stable par φ ?
4. Si $\varphi(P) \in E$, est ce que P appartient à E ?
   Indication : on pourra poser $f(x) = P(x)e^{-x}$.

Commentaire : Examinateur super sympa, qui me laissait faire car l'oral se passait bien.

Exercice 3 ★★★☆ *Centrale 2025 – Marc*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0$$

1. Montrer qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ avec P_2 strictement positif sur $\mathbb{R}$, tels que $P = P_1^2 P_2$.
2. En déduire l'existence de deux polynômes A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
3. On définit

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} = P + P' + P'' + \cdots + P^{(n)}$$

   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \geqslant 0$.

Commentaire : Ressenti 38 degrés, Pas de clim, Examinateur désagréable, oral funeste. Cet exercice est à priori faisable en sup, la honte...

Exercice 4 ★☆☆☆ *CCP 2025 – Juliette*

Exercice 2
Soit $P = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + X$.

1. Montrer que P admet au moins deux racines réelles.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Commentaire : Examinateur très calme qui met en confiance. Jeune et dynamique, il avait l'air d'être content d'être là, ce qui détend immédiatement l'atmosphère.

Exercice 5 ★★★☆ *Mines 2024 – Mélusine G.*

Exo 1 (15 min de préparation)
Soient $g \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation différentielle

$$g = y' + 3y \qquad (E)$$

1. Soit y solution de (E). Montrer que si $g \to 0$ en $+\infty$ alors $y \to 0$ en $+\infty$.
2. Que peut-on dire si $g \to L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$?
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,; +\infty[$. On suppose quelim$_{x \to +\infty}(f' + 3f) = 0$. Montrer que $f \to 0$.

Commentaire : examinateur sympa. Il ne me laisse pas bloquer sur les questions et donne vraiment le temps pour voir la réflexion sur toutes les questions.

Exo 2
$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - \cdots - 1$ pour $n \geqslant 2$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$. Montrer que $P_n(z) = 0 \iff z^{n+1} - 2z^n + 1 = 0$.
2. Combien P_n a-t-il de racines réelles ? Montrer que P_n admet une et une seule racine réelle positive.

Commentaire : Il y avait d'autres questions dans l'exo 2. Une question de cours a été posée : Énoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 6 ★★★☆ *Mines Pont 2023 – Nicolas S.*

Soit $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes, unitaire et de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta$.
2. En déduire qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que $|P(z)| \geqslant 1$.
3. Soient z_1, ..., $z_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe Z de module 2 tel que
$$\prod_{k=1}^{n} |Z - z_k| \geqslant 2^n$$
4. *Exercice 2 :* Étudier la convergence de
$$\sum_{n\geqslant 0} \sin(n!\, e\, \pi)$$

Commentaire : Oral désastreux je pense. J'ai fait des erreurs débiles sur le premier exo et globalement c'était très moyen. Sur le second, j'étais tellement perdu qu'il m'a fait redémontrer des choses nulles et pourtant j'avais du mal à avancer vite. L'examinateur était plutôt neutre et n'aidait pas beaucoup. J'espère me rattraper avec la physique.

Exercice 7 ★★★☆ *Centrale 2023 – Dimitri B.*

On se donne un polynôme complexe P de degré n avec $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. On pose $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n+1}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\omega^k\right)$
2. Montrer que $\displaystyle\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

Commentaire : (C'était le premier exercice de la planche, avec préparation) Il m'a un peu aidé pour le 1er exo. Examinateur sympa même si des fois on ne se comprenait pas.

Exercice 8 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Louis K.*

On considère le polynôme
$$P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$$

Montrer que $j = e^{2i\pi/3}$ est racine de P. Quelle est sa multiplicité ?

Commentaire : Deuxième exo d'un oral CCP. Examinatrice calme, même bienveillante.

Exercice 9 ★★★☆ *Centrale 1 2022 – Gabrielle V.*

On considère le polynôme
$$P = X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$$

On note x_1, x_2, x_3 et x_4 ses racines.

1. À l'aide de la forme factorisée de P, trouver des relations entre a, b, c et les racines.
2. Montrer que $b = 0$ si et seulement si les racines forment un parallélogramme dans le plan complexe.
3. Donner une CNS pour que les racines forment un rectangle.

Commentaire : oral catastrophique, l'examinateur a fini par s'arrêter quelques instants de souffler et de faire du découpage pour me faire remarquer que c'était niveau collège. Du coup il m'a stressée, je n'étais plus dans le truc et j'écrivais des trucs débiles toutes les demi lignes au moins.

Exercice 10 ★★★☆ *Centrale 1 – Guillaume C.*

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme P_n tel que
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)^n}$$
2. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que P_n est scindé à racines simples.

Commentaire : Je n'ai pas vraiment été bloqué mais je n'ai pas tout fait. L'examinateur était chill et laissait faire. C'est un exercice classique où j'ai fait quelques erreurs de calcul, corrigées juste après. J'aurais quand même aimer être plus rapide et efficace mais ça c'est le résumé de ma vie, que ce soit aux écrits ou aux oraux.

Exercice 11 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Elouan O.*

On définit les polynômes $S_k(X) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$, en convenant que $S_0(X) = 1$.

1. Donner $S_1(X)$, $S_2(X)$, $S_3(X)$.
   Quel est le degré de $S_k(X)$?

2. a) Montrer que $\mathcal{S} = (S_0, S_1, \dots, S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

 b) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Que vaut $S_k(n)$?

3. Dans toute la suite on se donne un $n+1$-uplet de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

 a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k$.

 Montrer que $\dfrac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{(n-k)!}$.

 b) En déduire que $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{P(n)}{n!}$ converge.

4. Donner une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!}$ en fonction des a_k.

5. Convergence et somme de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2(n-1)\dots(n-k+1)}{n!}$$

Exercice 12 ★★★☆ Centrale 1 2021 – Rémy D.

1. Soit P un polynôme tel que

$$P(X) + P(X+1) = 0$$

 Montrer que $P = 0$.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n vérifiant : $P_n(X) + P_n(X+1) = X^n$.

3. Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1}.

4. Trouver une relation entre $P_n(X+1)$ et les polynômes P_0, ..., P_n. En déduire une relation de récurrence vérifiée par les P_n.

Exercice 13 ★☆☆☆ 💻 CCP 2018

Soit $P_n = X^{4n} + X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$.

1. Trouver les racines complexes de P_1.
2. Trouver les entiers n tels que $P_1 \mid P_n$.
3. Vérifier le résultat avec un test en Python.

Exercice 14 ★★★☆ Mines 2018

Trouver les racines du polynôme

$$P = 1 + 2X + \dots + (n-1)X^{n-2} + nX^{n-1} + (n-1)X^n + \dots + 2X^{2n-3} + X^{2n-2}$$

Exercice 15 ★★★★ X 2018

Soient A, B, $C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A + B = C$. On suppose que A, B et C n'ont aucune racine commune et que l'un des trois polynômes est de degré > 0. On pose $D = A'B - AB'$.

1. Soit z une racine de ABC de multiplicité n. Montrer que z est racine de D de multiplicité au moins $n-1$. On note μ le nombre de racines distinctes de ABC.

2. Montrer que

$$\mu \geqslant \deg(A) + \deg(B) + \deg(C) - \deg(D)$$

3. Montrer que $\mu > \max\{\deg(A), \deg(B), \deg(C)\}$.

Exercice 16 ★★★☆ Mines 2017

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(1 + iX)^n = P + iQ$$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Montrer que $aP + bQ$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 ★★★★ X 2018

Soient $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ et $M(f) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Montrer que si f coïncide avec une fonction polynomiale sur $\mathbb{N}^*$, alors $M(f)$ aussi.

Exercice 18 ★★★★ X 2012

Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ on pose

$$L_k = \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

Si $p \in \{0, \dots, n+1\}$, calculer $\sum_{i=0}^{n} x_i^p L_i(0)$.

Exercice 19 ★★★★ ENS 2016

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$\|P\| = \max_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$g_t(X) = \frac{P(tX) - P(t)}{X - 1}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $t \in \mathbb{C}$, montrer que g_t est un polynôme. Déterminer $g_t(1)$.
3. Soit $n \geqslant 1$. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que

$$g_t(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k g_t(z_k) \frac{X^n + 1}{z_k - X}$$

4. En déduire une expression simple de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2z_k}{(z_k-1)^2}$$

5. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $\|P'\| \leqslant n\|P\|$.

— Algèbre générale —

Exercice 20 ★★★☆ *Centrale 2025 – Mattys*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On définit la moyenne arithmétique $S(x)$ et la moyenne géométrique $P(x)$ par :

$$S(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i \quad \text{et} \quad P(x) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} x_i\right)^{1/n}$$

1. Donner la définition d'une fonction convexe.
2. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Montrer que pour tout $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0\,;\,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
3. En utilisant la convexité de la fonction $-\ln$, établir l'inégalité :
$$S(x) \geqslant P(x)$$
4. On introduit le terme d'écart
$$T(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2$$
Écrire une fonction Python `moyennes(X)` qui renvoie $S(x)$, $P(x)$ et $T(x)$ pour une liste ou un tableau `X` donné.
5. Écrire un programme qui génère 1000 vecteurs x aléatoires de taille n et qui calcule le maximum de la quantité $n(S(x)-P(x))-T(x)$ pour ces vecteurs.
6. Donner les valeurs de `test(n)` pour $n \in [\![1\,;\,5]\!]$.
7. Établir une conjecture liant $n(S(x)-P(x))$ et $T(x)$.
8. Démontrer cette conjecture dans le cas $n = 2$.

Exercice 21 ★★★☆ *Mines 2022 – Ferdinand J.*

(Exo préparé)
Soit $E = [\![1\,;\,n]\!]$. On note D_n le nombre de partitions de E_n.

1. Montrer que $D_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
2. Montrer que $D_n = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

(exo 2)
Soit $A \subset E$ avec E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Vect}(A)$ admet une base dont les éléments appartiennent à A.

Commentaire : Il m'a donné deux autres exos ridicules à la fin. Examinateur super cool, ça se voit qu'il voulait me donner des points (notamment avec les deux derniers exos non retranscrits) Mais les deux vrais exos, je n'y arrivais vraiment pas. Donc oral bien pourri, qui avec le TP de Chimie a flingué mes mines.

Exercice 22 ★☆☆☆ *CCP 2018*

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit les équations
$$(\varepsilon_{n,p}) \;:\; \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = p$$
Soit $E_{n,p}$ le nombre de solutions de $(\varepsilon_{n,p})$, d'inconnues $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Expliciter les solutions de $\varepsilon_{1,p}$ et calculer $E_{1,p}$.
2. a) Déterminer $E_{2,2}$.
   b) Pour $p \geqslant 2$ et $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, on pose $S_{n,k}$ le nombre de solutions de l'inéquation
   $$\max(|x_1, \dots, |x_n|) \leqslant p$$
   Exprimer $E_{n,p}$ en fonction de $S_{n,k}$.
3. Montrer que $E_{n,1} = 3^n - 1$.
4. Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$ on a
$$E_{n,p} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$$
Montrer qu'il existe C tel que
$$E_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\cdot(2n)^n$$

Exercice 23 ★★★☆ *Mines 2017*

Donner un exemple de polynôme réel non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, le polynôme $P+r$ ne soit pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 ★★★☆ *Mines 2017*

Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$.

— Algèbre linéaire —

Exercice 25 ★★★☆ *Mines 2025 – Charles*

Exercice 1
Soient E, F, G, H quatre espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ et $h \in \mathcal{L}(G,H)$. Montrer que :
$$\mathrm{rg}(g\circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h\circ g\circ f)$$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| < 1$$

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer que la suite (u_n) est bien définie et étudier sa convergence.

Indication : Pour la question 3, utiliser le théorème des accroissements finis.

Exercice 26 ★★☆ 💻 *Centrale 2025 – Joseph K*

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
On définit l'application Δ par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2. L'application Δ est-elle injective ?

3. On définit $g_p : x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{N}$

(a) Coder une fonction `delta_it(p, k, x)` qui renvoie $\Delta^k(g_p)(x)$, où $\Delta^k = \Delta \circ \cdots \circ \Delta$ (k fois).

(b) Utiliser cette fonction pour représenter graphiquement les $\Delta^k(g_p)$ sur $[1, 10]$ pour $p \in \{3, 5\}$ et k allant de 1 à p.

(c) Conjecturer le signe de $\Delta^k(g_p)$.

4. Soit d l'application qui à une fonction associe sa dérivée. Montrer que $d \circ \Delta = \Delta \circ d$.

5. Soit $\lambda \in \,]-1\,;+\infty[$ fixé.
Montrer que $\ker(\Delta - \lambda\,\mathrm{Id})$ est un espace de dimension infinie *Indication : on pourra étudier le quotient $\frac{f}{g}$ avec g ne s'annulant pas, pour* $f, g \in \ker(\Delta - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Commentaire : Ça s'est mal passé... J'ai fait beaucoup d'erreurs sur la nature des objets mathématiques, et en Python aussi. Examinateur bienveillant et sympathique. Je redoutais un exo de ce genre, bref... Il restait encore 4 questions après celles-ci.

Exercice 27 ★★☆ *Centrale 1 2024 – Cody D.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie m. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1. Montrer que la suite $(\ker f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et stationnaire à partir d'un rang p, $p \in [\![1\,;\,m]\!]$.

2. Montrer que $\ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p = E$.

3. Montrer que p est le plus petit entier tel que $\ker f^p \oplus \mathrm{Im}\, f^p = E$.

4. Montrer que $\ker f^p$ et $\mathrm{Im}\, f^p$ sont stables par f.

Commentaire : Je crois que c'est un classique. Ça s'est bien passé.
Commentaire du prof : Oui c'est un classique : la suite des noyaux itérés.

Exercice 28 ★★☆ 💻 *Centrale 2 2024 – Mattys B.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} r_k = \dim \ker u^k \\ s_k = \dim \mathrm{Im}\ u^k \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
2. Montrer qu'il existe deux entiers p_1 et p_2 tels que
$$\forall k \geqslant p_1, r_{k+1} = r_k$$
$$\forall k \geqslant p_2, s_{k+1} = s_k$$
3. Montrer $p_1 = p_2$. On notera $p = p_1 = p_2$.
4. Écrire deux fonctions qui donnent :
$[s_0, \ldots, s_m]$
$[r_0, \ldots, r_m]$
5. Afficher les graphes des $(s_{k+1} - s_k)$ et $(r_{k+1} - r_k)$ en fonction de k ($k < 15$). Faire une conjecture.
6. Montrer que $\ker u^p$ et $\mathrm{Im}\ u^p$ sont supplémentaires.
7. Démontrer votre conjecture.

Exercice 29 ★☆☆ *CCP 2024 – Louis K.*

L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u^3 = u$.

1. Montrer $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$

2. Soit $\tilde{u} : \mathrm{Im}(u) \to \mathrm{Im}(u)$ l'endomorphisme induit. Montrer que $\tilde{u}$ est un automorphisme.

Commentaire : C'est l'exo2, après un exo de probas.

Exercice 30 ★☆☆ *CCP 2024 – Marc D.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On se donne $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Calculer $\det(s)$.
Commentaire : Cet exercice court est l'exo 2 de l'oral.

Exercice 31 ★★★☆ *Centrale I 2023 – Nicolas S.*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $g \in \mathcal{L}(E)$ est un pseudo-inverse de f si

$$\begin{cases} f \circ g \circ f = f \\ g \circ f \circ g = g \\ g \circ f = f \circ g \end{cases}$$

1. Que dire si f est inversible ? Que dire si f est l'application nulle ?
2. Montrer que si f a un pseudo-inverse alors $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} f \oplus \ker f = E$. Montrer qu'alors f_1, l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$, admet un inverse. En déduire que f a un pseudo-inverse.
4. Montrer que f admet un pseudo-inverse si et seulement si $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.
5. Soit $g : \operatorname{Im}(f) \to \operatorname{Im}(f)$ l'endormorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$. Montrer que $g^2 = -\mathrm{id}_{\operatorname{Im} f}$.
6. À l'aide du déterminant, montrer que le rang de f est pair et que $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.
7. *(Une autre question qui a été perdue)*

Commentaire : Globalement, ça c'est bien passé. Examinateur très sympa et qui voulait que je sois précis. J'étais très hésitant et il l'a remarqué tout de suite, mais j'ai quand même réussi à faire la majorité de l'exo sans problème. Cependant, c'est passé beaucoup trop vite ce qui m'énerve parce que l'exo n'était pas compliqué.

Exercice 32 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Ambroise D.*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E, et a un vecteur non nul de E.
On suppose que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Vect}(a)$.

1. Montrer qu'il existe un scalaire λ_a tel que $u^2(a) = \lambda_a u(a)$.
2. Montrer que $u^2 = \lambda_a u$ puis que λ_a est valeur propre de u.

Commentaire : Deuxième exo d'un oral CCP.

Exercice 33 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Cécile C.*

On se donne un endomorphisme f d'un espace vectoriel E et on suppose que f est non nulle, admet 0 pour valeur propre et vérifie $f^3 + f = 0$.

1. Justifier que
$$\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2) \text{ et } \ker(f) \neq \{0\}$$
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \ker(f^2 + \mathrm{id}_E)$ et que $\ker(f^2 + \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Im}(f)$.
3. Justifier que
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \text{ et } \ker(f) = \ker(f^2)$$
4. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f.

Commentaire : (Il y avait ensuite un deuxième exercice de séries entières.) Les trois premières questions de l'exercice 1 étaient faciles et j'aurais du passer dessus plus vite pour aborder la suite mais j'ai (encore) manqué de confiance en moi sur certains trucs :(

Exercice 34 ★☆☆☆ *CCP 2022 – Eliane H.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f, $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

$$f + g = \mathrm{id}_E \text{ et } \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$$

Montrer que :

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$$

$$\ker f = \operatorname{Im} g \text{ et } \ker g = \operatorname{Im} f$$

Exercice 35 ★★☆☆ *Telecom 2022 – Jean Jacques G.*

(exo 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id} = 0$$

1. Montrer que f est bijective et donner sa bijection réciproque.
2. Montrer que
$$\ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}) = E$$

Commentaire : Les deux exos étaient assez abordables. J'ai quand même réussi à ne pas finir... Examinatrice très sèche les rares moments où elle parle.

Exercice 36 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Léna S.*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1, tel que $f \circ f \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 37 ★★★☆ *Mines 2018*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \operatorname{Im} f \subset \ker g \text{ et } \operatorname{Im} g \subset \ker f\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sev et donner sa dimension.

Exercice 38 ★★★☆ *Mines 2018*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leqslant \dim E$.

Montrer que $\ker f \oplus \ker g = E$ et que f et g sont des projecteurs.

Exercice 39 ★★☆☆ *TPE 2018*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g$$

1. a) Soient A, B et C trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(A,B)$ et $v \in \mathcal{L}(B,C)$. Montrer que

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v) \text{ et } \operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$$

   b) Comparer $\operatorname{rg}(f)$ et $\operatorname{rg}(g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.
3. On suppose que $\dim E = \dim F = \operatorname{rg} f = n$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 40 ★★★☆ *Mines 2018*

Soient $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $F_k = \dfrac{1}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1)$, en convenant que $F_0 = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (F_0, \dots, F_n)$ est une base de E_n.
2. Soit Φ définie par $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que Φ est un endomorphisme.
3. Donner la matrice de Φ dans $\mathcal{B}$.
4. Soit $Q \in E_{n-1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $\Phi(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. On suppose que $n = 3$ et $Q = X^2$.
   a) Exprimer Q dans $\mathcal{B}$.
   b) En déduire P.
   c) En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 41 ★★★☆ *Mines 2018*

Trouver tous les $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 42 ★★★☆ *Mines 2018*

Soient f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont stables par g.
2. Soit p un projecteur de E. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f.

Exercice 43 ★★★★ *X 2018*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que les seuls sous-espaces stables à la fois par a et b sont $\{0\}$ et V. On considère $u \in \mathcal{L}(V)$ non nul qui commute avec a et b. Montrer que u est inversible.

Exercice 44 ★★★★ *X 2018*

Soit $(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^n$ qui engendrent dans $\mathbb{C}^n$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension r. Quelle est la dimension r' du $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_s)$ dans $\mathbb{R}^n$?

— Déterminants —

Exercice 45 ★★★☆ *Mines 2025 – Raphaël*

Exercice 2
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Soient $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\det(\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{I}_q - \boldsymbol{BA})$$

Question de cours : Énoncer la règle de la chaîne (dérivée d'une composée) pour des fonctions de deux variables.

Exercice 46 ★★★☆ *Centrale 2025 – Amélie*

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels distincts deux à deux dans $[0\,;\pi]$.
On considère la matrice $\boldsymbol{M} = (m_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \cos((j-1)a_i)$$

On note $\Delta_n = \det(\boldsymbol{M})$.
On pose également $P_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\cos(a_j) - \cos(a_i))$.

1. Déterminer Δ_2 et Δ_3 en fonction de P_2 et P_3.
2. Montrer que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe un polynôme $Q_j \in \mathbb{R}[X]$ tel que la j-ième colonne de M soit $(Q_j(\cos(a_i)))_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_j.
3. En déduire une expression de Δ_n en fonction de P_n.

Exercice 47 ★★★☆ *Centrale I 2023 – Stéphane T.*

1. Soient $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \geqslant 0$. Montrer que

$$\det(\boldsymbol{A}^2 + \lambda \boldsymbol{I}) \geqslant 0$$

Commentaire : Il y avait deux autres questions. Je n'ai réussi que la première mais c'était fun et on a bien rigolé avec mon examinateur.

Exercice 48 ★★★☆ Centrale 2 2022 – Cécile F.

On pose :

$$D_n(a,b)=\begin{vmatrix} a & 2b & & & \\ 1 & \ddots & b & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & b \\ & & & 1 & a \end{vmatrix}_{(n)}$$

$$\boldsymbol{A}_n(b)=\begin{bmatrix} 0 & -2b & & & \\ -1 & \ddots & -b & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -b \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

En convenant que $D_1(a,b)=a$ et $\boldsymbol{A}_1(b)=[\,0\,]$.

1. Calculer $D_n(a,b)$ pour tout $n\in[\![1\,;3]\!]$.
2. Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 sur les $D_n(a,b)$.
3. Écrire une fonction Python `D1(n,a,b)` qui renvoie $D_n(a,b)$.
4. Montrer que $D_n(a,b)$ est une fonction polynomiale en a et déterminer son degré.
5. Pour $n\in[\![3\,;5]\!]$ et $b\in[\![1\,;5]\!]$, tracer $a\mapsto D_n(a,b)$ sur $\left[-2\sqrt{b}\,;2\sqrt{b}\right]$. Que peut-on conjecturer sur les racines ?
6. D'après la conjecture de la question précédente, que dire sur la réduction de $\boldsymbol{A}_n(b)$?
7. On pose $T_1(X)=1$, $T_2(X)=X$ et, pour tout entier naturel n : $T_{n+2}(X)=2XT_{n+1}(X)-T_n(X)$. Expliciter $T_n(\cos\theta)$.

Commentaire : Il y avait d'autres questions (11 au total). Examinateur étonnament jeune. Ne parlait pas beaucoup.

Exercice 49 ★☆☆☆ CCP 2018

Soit f définie pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)=P'$ (on supposera $n\geqslant 2$).

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Trouver le spectre de f. Est-ce que f est injective ? diagonalisable ?
3. On appelle g l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $g(X^k)=X^{n-k}$.
   a) Montrer que g est un automorphisme.
   b) Soit $h=g\circ f\circ g^{-1}$. Est-ce que h est diagonalisable ?
4. Trouver a et b tels que
$$f(P)+h(P)=aXP(X)+b(X^2-1)P'(X)$$
5. On note u cet endomorphisme et $\boldsymbol{A}$ la matrice associée dans la base canonique. Donner la forme de la matrice $\boldsymbol{A}$.
6. Calculer $\det(\boldsymbol{A})$.

Exercice 50 ★★★☆ Mines 2016

Déterminer les $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall \boldsymbol{M}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{A})+\det(\boldsymbol{M})$$

Exercice 51 ★★★★ X 2016

Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}$. Montrer que $\det(\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{AB})$.

— Matrices —

Exercice 52 ★☆☆☆ CCP 2024 – Maëlys M.

Soit $n\geqslant 2$. Soient a, $b\in\mathbb{R}$.
On pose $\boldsymbol{N}=a\boldsymbol{U}+b\boldsymbol{I}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boldsymbol{I}$ la matrice identité et $\boldsymbol{U}$ la matrice de coefficients tous égaux à 1.

1. Exprimer $\boldsymbol{N}^2$ en fonction de $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{I}$.
2. Trouver une CNS sur a,b pour que $\boldsymbol{N}$ soit inversible.

Commentaire : C'était l'exo 2.

Exercice 53 ★★★☆ Mines 2024 – Raphaël A.

Soient $\boldsymbol{A}\in\mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{B}\in\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose :

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

— Montrer que $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{AB}$.
Déterminer $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A})$ et $\operatorname{rg}(\boldsymbol{B})$.
— Montrer que $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_2$.
— Montrer les inégalités

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rg}(\boldsymbol{A})$$
$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{AB})\leqslant\operatorname{rg}(\boldsymbol{B})$$

Commentaire : C'était l'exo 2, après un exo 1 d'analyse.

Exercice 54 ★☆☆☆ CCP 2024 – Mattys B.

On pose pour a, b, $c\in\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{M}_{a,b,c}=\begin{bmatrix}a+c & -a & b\\ -b & a+2c & a\\ -c & a+b & c\end{bmatrix}$$

1. Donner $\dim\{\boldsymbol{M}_{a,b,c} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

2. Montrer que $\{\boldsymbol{M}_{a,b,c} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ est stable par produit.

Commentaire : C'est l'exo 2 de l'oral.

Exercice 55 ★★☆ *Mines 2023 – Dimitri B.*

Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\boldsymbol{AAB} = \boldsymbol{A}$ et que $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = \operatorname{rg} \boldsymbol{B}$. Montrer que $\boldsymbol{BBA} = \boldsymbol{B}$.
Commentaire : (c'était l'exercice 2) Examinatrice muette donc difficile de s'évaluer.

Commentaire du prof : Exercice pas évident sans indication, il ne faut pas oublier l'hypothèse du rang et se poser des questions sur la dimension des noyaux et des images de tout le monde...

Exercice 56 ★★☆ *Mines Pont 2023 – Gari P.*

Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$f(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_n$$

1. Montrer que f est un isomorphisme de deux façons différentes.

2. Pour $\boldsymbol{N} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, exprimer l'antécédent de $\boldsymbol{N}$ par f.

3. *Exercice 2 :*

Soient $f, g : [0\,;\,1] \to [0\,;\,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0\,;\,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Commentaire : Examinateur très sympa qui me disait que j'avais le droit de lui demander une indication. Pour l'exo 2 j'ai proposé un raisonnement par l'absurde et j'ai essayé de raisonner sur le fait que f et g ont au moins un point fixe, mais j'étais bloqué. Il m'a dit de me servir de l'hypothèse que j'ai faite ($f(x) \neq g(x)$ pour tout x), de considérer la fonction de signe constant $x \mapsto g(x) - f(x)$ et de montrer que $g \circ g \circ \cdots \circ g(x)$ était non bornée quand $n \to \infty$. Je n'ai rien compris à son indication.

Exercice 57 ★★☆☆ *Mines Telecom 2023 – Jean Jacques G.*

Soit $\boldsymbol{U} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On définit $\varphi : \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi : (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \mapsto \boldsymbol{X}\boldsymbol{U}^\intercal + \boldsymbol{U}\boldsymbol{Y}^\intercal$$

1. Rappeler les dimensions de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$

2. Montrer que φ est linéaire.

3. Pour $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, quel est le rang de φ ?

Commentaire : (C'était l'exercice 2) Examinateur très sympa, très posé, clair, qui laisse faire. Ne parlait pas beaucoup. Il a vu que j'étais un peu stressé et m'a vite mis à l'aise.

Exercice 58 ★★☆ *Mines Pont 2023 – Stéphane T.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $r \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ on pose

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{n} \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

1. Montrer que $\boldsymbol{K}_4$ est nilpotente. On admet dans la suite que $\boldsymbol{K}_r$ est nilpotente.

2. Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante. On suppose que

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), f(\boldsymbol{AB}) = f(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{B})$$

Montrer que $f(\boldsymbol{M}) = 0$ ssi $\boldsymbol{M} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Commentaire : (C'était le deuxième exo) Examinateur trop bizarre. Il m'a dit : « Vous pouvez demander une indication vous savez. » et quand je lui ai posé une question il me sort : « Je ne peux pas vous répondre. » :(

Exercice 59 ★★☆ *Mines 2022 – Hadrien B.*

(exo 1)
Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices inversibles qui vérifient :

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$$

1. Montrer que n est pair.

2. Pour $n = 2$, montrer que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont diagonalisables.

3. Donner un exemple de telles matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

(exo 2)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Quelle est la forme de f ?
Même question pour $f(x+y) = f(x)f(y)$.
(exo 3)
Soit $f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!]$. Quelle est la probabilité pour que f soit surjective ? Même question pour $f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n-1]\!]$. Trouver un équivalent de cette probabilité quand $n \to +\infty$.
Commentaire : J'ai été moyen sur le premier exo mais je connaissais les autres, donc ça va.

Exercice 60 ★★☆ *Mines 2022 – Dimitri B.*

(exo 1)
On considère $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$f(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M} + \operatorname{tr}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}_n$$

1. Montrer de deux façons différentes que f est un isomorphisme.
2. Exprimer l'antécédent par f d'une matrice $\boldsymbol{N}$.

(exo 2)
Résoudre l'équation fonctionnelle suivante, d'inconnue f deux fois dérivable :

$$f''(x) + f(-x) = x$$

Commentaire : Examinateur très sympathique.

Exercice 61 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Kahina B.*

Soit $n \geqslant 2$, soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On se donne une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\Gamma_k(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{M}\}$$

1. Montrer que $\Gamma_k(\boldsymbol{A})$ est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\Gamma_k(\boldsymbol{A}) \subset \Gamma_{k+1}(\boldsymbol{A})$.
3. Calculer $\Gamma_1(\boldsymbol{A})$, $\Gamma_2(\boldsymbol{A})$ et $\Gamma_3(\boldsymbol{A})$ pour
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
4. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ est inversible alors $\Gamma_1(\boldsymbol{A}) = \Gamma_2(\boldsymbol{A})$.
5. On suppose que $\Gamma_1(\boldsymbol{A}) = \Gamma_2(\boldsymbol{A})$. Montrer que $\boldsymbol{A}$ est inversible.
6. On pose $u_k = \dim \Gamma_k(\boldsymbol{A})$. Montrer que (u_k) est une suite croissante. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = u_{k+1}\}$.
Montrer que $\forall k \geqslant p,\ \Gamma_k(\boldsymbol{A}) = \Gamma_{k+1}(\boldsymbol{A})$.

Exercice 62 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Khaled S.*

Dans $\mathbb{R}^3$, on désigne par (Δ) la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ et (P) le plan d'équation $x + y + z = 0$.

1. Donner la matrice représentative du projecteur sur (Δ) parallèlement à (P), dans une base bien choisie.
2. Même question mais dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 63 ★★★☆ *Mines 2021 – Zeyuan H.*

Soit E un ev de dimension finie $3n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang $\operatorname{rg}(f) = 2n$ et nilpotent d'indice 3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f s'écrit par blocs :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Exercice 64 ★★☆☆ *Telecom 2021 – Thibault D.*

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $g_{ab} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ g_{ab}(z) = az + b\overline{z}$$

1. Quelle est la matrice de g_{ab} dans la base canonique ?
2. Montrer qu'il existe un unique couple de complexes $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f = g_{ab}$.
3. Trouver le déterminant de f en fonction de a et b.

Exercice 65 ★★★★ *Centrale 2018*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. On pose

$$g : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{AM} - \boldsymbol{MA}$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} g$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. En déduire que pour toute matrice $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{M} = 0 \iff$$
$$\exists (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{BC} - \boldsymbol{CB}$$

Remarque : C'est un exo centrale difficile, qui contient des résultats qui préparent bien pour xens aussi...

Exercice 66 ★★★★ *X 2009*

1. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de
$$\Phi : \boldsymbol{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \boldsymbol{XA} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$
2. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques et $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de
$$\Psi : \boldsymbol{X} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto \boldsymbol{XA} - \boldsymbol{AX} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 67 ★★★★ *X 2018*

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. Montrer que $\operatorname{tr}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 68 ★★★★ *X 2018*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0,1\}$ telle que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\intercal = q\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}$. (où $\boldsymbol{J} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1)

1. Montrer que $\boldsymbol{A}$ est inversible.
2. Montrer que $\boldsymbol{AJ} = (q+1)\boldsymbol{J}$.

— Fonctions d'une variable réelle —

Exercice 69 ★★☆☆ *Telecom 2025 – Zakaria*

Exercice 1
Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Commentaire : Examinateur très sympa.

Exercice 70 ★☆☆☆ *CCP 2025 – Mila*

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

Montrer que $P = 0$.

2. Trouver une fonction g non nulle, continue sur $\mathbb{R}^*$, telle que $g(x + \frac{1}{x}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Commentaire : Plus des questions de probas que j'ai pas eu le temps de faire... (J'ai fait n'importe quoi...). Pour l'exercice 2, il fallait regarder les variations de $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ qui prend ses valeurs dans $]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty]$. J'ai pas su faire, il ne restait plus de temps.

Exercice 71 ★★★☆ *Mines 2024 – Côme B.*

Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(f(x)) = x$, pour tout réel x.
Commentaire : C'est l'exo2, après un exo 1 d'algèbre linéaire.

Exercice 72 ★★★☆ 💻 *Centrale 2 2024 – Moira A.*

On se donne $f : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ continue et on pose, pour $x \in [0\,;\,1]$:

$$G_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Montrer les égalités

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
3. En Python, tracer $G_n(f(x))$ pour :

$$f(x) = x^2,\ f(x) = |x|,\ f(x) = \frac{1+x}{2}$$

On prendra $n = 10$.
Conjecturer sur la monotonie et la convexité de $G_n(f)$.

4. Vérifier cette conjecture.

Exercice 73 ★☆☆☆ *CCP 2024 – Eva C.*

1. Donner les solutions à l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$x^2 y'(x) - y(x) = 0$$

2. On cherche à déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1$ vérifiant : $\forall x > 0$,

$$x^2 f'(x) - (1 - A)f(x) = 1 \qquad (\mathcal{E})$$

On suppose dans la suite de l'exercice que f vérifie cette équation.
Montrer que f est strictement croissante.

3. On suppose que f est majorée par 1. Donner l'expression de f. Donner $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire une contradiction.
4. On suppose que f est minorée par 1. Donner l'expression de f. En déduire une contradiction.
5. En déduire l'expression de f.
6. Donner l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Commentaire : C'est l'exo 1. Il y avait aussi un exo 2 sur la réduction.

Exercice 74 ★★★★ *X 2023 – Eliane H.*

1. *Exercice 1*
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - f est croissante.
   - Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: Si $f - g$ a un minimum local en x_0 alors $g'(x_0) \geqslant 0$.
2. *Exercice 2*
Soient $a < b < c$ des réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $f(b) < f(a)$ et $f(b) < f(c)$.
Montrer que f admet un minimum local.

Commentaire : J'ai eu le même examinateur que l'an dernier (toujours aussi muet), il m'a reconnu, il a fait son malin, ça a marché : j'ai raté cet oral... J'aime pas les maths ! (Sans vouloir vous offenser M.Angeli)

Exercice 75 ★☆☆☆ *CCP 2022 – Yoojin S.*

(exo 2)
Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

Est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ? Que peut-on en déduire ?
Commentaire : L'exo 1 était sur de l'algèbre - réduction. Encore un oral de maths bof... Il a précisé que je faisais les « grosses erreurs que tout le monde fait »... super :(

Exercice 76 ★☆☆☆ *CCP 2022 – Thomas D.*

(exo 1)
La fonction f est définie sur $]-\pi/2\,;\,\pi/2[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1. Montrer que f est $\mathbb{C}^\infty$ et donner f' et f''.
2. a) Montrer que la dérivée n-ième de f est de la forme :
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1} x}$$
où P_n est un polynôme.
INDICATION :
$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$
   b) Montrer que P_n est unitaire de degré n.
3. a) On donne un nom aux coefficients de P_n :
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}X^k$$
Montrer que les $a_{n,k}$ sont positifs puis que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $0 \leqslant x < \pi/2$.
   b) Montrer que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$$
où $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$
   c) Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,\pi/2[$ et tout $y \in]x\,;\,\pi/2[$:
$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{f(y)}{y^{n+1}}$$

Exercice 77 ★★☆☆ *Telecom 2021 – Marion L.*

On pose $f(x) = x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de son ensemble de définition vers un ensemble à préciser. On notera g la bijection réciproque.
2. Donner $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que g admet un DL à tout ordre au voisinage de 0.
4. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de g.

Exercice 78 ★★★★ *X 2021 – Adam P.*

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x+y^3) + f(x-y^3)}{2}$$

Commentaire : « entraînez-vous aux équations fonctionnelles ! ! ! »

Exercice 79 ★★★☆ *Mines 2021 – Ulysse M.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0\,;\,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0\,;\,1]$.

Exercice 80 ★★★☆ *Mines 2021 – Zeyuan H.*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel $a(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{a(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. Montrer que la fonction $a : x \mapsto a(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la courbe représentative de a est invariante par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 81 ★★★☆ *Mines 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = 1 + \int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer les fonctions f vérifiant $(*)$

Exercice 82 ★★★★ *ENS 2018*

1. Soient $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \leqslant g$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = g(a)$. Montrer que les graphes de f et g admettent la même tangente en a.

2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telles que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x)f(y)$$

Exercice 83 ★★★★ *X 2017*

1. Montrer que la fonction cos admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe.

2. Montrer qu'il n'existe aucune fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 84 ★★★★ *X 2018*

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $e^x - 1$ à l'ordre n. On appelle T_n la partie polynomiale.

2. Montrer que pour n impair, T_n n'a pas de racine non nulle.

3. Montrer que pour n pair, T_n a des racines non nulles. Montrer que cette racine est unique.

— Suites, séries —

Exercice 85 ★★★☆ *Centrale 2025 – Élea*

Exercice 2 Soit $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général u_n converge-t-elle ?

2. Supposons que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge, calculer sa somme et son reste.

Exercice 86 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Eliane H.*

On considère l'équation (E), d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1$$

1. Si $n \geqslant 1$, montrer que (E) admet une unique solution x_n.

2. Montrer que $x_n \in \,]0\,;\,1]$.

3. Etudier la nature de (x_n).

Commentaire : Deuxième exo d'un oral CCP. Il y avait sans doute d'autres questions.

Exercice 87 ★★☆☆ *Mines Telecom 2023 – Cody D.*

On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Convergence et calcul de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

Exercice 88 ★☆☆☆ *CCP 2022 – Ferdinand C.*

(exo 1)
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 \in \,]-1\,;\,0[\end{cases}$$

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x^2 + x$ puis montrer que $f(]-1\,;\,0[) \subset \,]-1\,;\,0[$.

2. Montrer que $u_n \in \,]-1\,;\,0[$ pour tout entier naturel n.

En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

3. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

4. Soit $a_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$.

a) La suite (a_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite (qu'on notera ℓ).

b) On suppose que $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{p=1}^{n} a_p \to \ell$.

Donner un équivalent de u_n puis étudier la convergence de $\sum u_n$.

c) Montrer que $\sum_{p=1}^{n} a_p \to \ell$.

Commentaire : Examinateur sympathique qui laisse parler et accepte les justifications à l'oral.

Exercice 89 ★★★★ *X 2022 – Eliane H.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, t_0-périodique, qui atteint son maximum global en $x_0 \in [0\,;\,t_0[$. On définit :

$$f_1(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) + \sin(\alpha x)$$

$$f_3(x) = f(x) + f(\alpha x)$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles périodiques ?

Commentaire : Examinateur très sympa et souriant qui a essayé de résoudre l'exercice avec moi en me donnant des indications. Par contre pour la fonction f_3 il m'a donné des indications mais je ne comprenais pas les termes qu'il a employés... J'ai donc fait semblant :)

Exercice 90 ★☆☆☆ *CCP 2022 – Alexandre S.*

(exo 1)
Soit $n \geqslant 3$ un entier. On pose pour tout réel x :

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + x - 1$$

1. Pour $X > 0$, existence et calcul de $\displaystyle\int_3^X \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites à termes strictement positifs, tendant vers 0, et équivalentes. Montrer que $\ln a_n \sim \ln b_n$.
3. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;1[$, que l'on notera u_n.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^{n-1}(1 - u_{n+1}^2)$. Que dire de la monotonie de (u_n) ?
5. Montrer $u_n = 1 - \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. Nature de la série $\sum(u_n - 1)$?

   (exo 2)
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Commentaire : Examinateur sympa mais qui aidait peu.

Exercice 91 ★★☆☆ *Telecom 2022 – Anael N.*

Soit $a > 0$. Pour tout entier n on définit

$$u_n = \arctan(n + a) - \arctan(n)$$

Donner un équivalent de (u_n).

Exercice 92 ★★★☆ 💻 *Centrale 2 2022 – Ferdinand*

On considère l'équation (E_n) :

$$e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, qu'on notera a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Montrer que $a_n \to +\infty$.
4. Définir une fonction Python qui renvoie a_n, et calculer les valeurs de la suite pour n allant de 1 à 20.

Commentaire : Il restait pas mal de questions avec du gros calcul. Examinateur sympa mais il a forcé 15 minutes avec le Python alors que je n'y arrivais clairement pas. Du coup je n'ai fait que quatre questions sur beaucoup plus. Bof.

Exercice 93 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Khaled S.*

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b + 1$. On se donne une suite réelle (u_n) vérifiant $u_0 > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\frac{a+n}{b+1}\right)$$

1. Donner un équivalent de u_{n+1}/u_n.
2. Montrer que $\sum \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\infty$.
3. En notant $\alpha = b - a$, montrer que $v_n = n^\alpha u_n$ converge.
4. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 94 ★★★☆ 💻 *Centrale 2 2021 – Emma M.*

On considère l'équation (E) : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} p^x = n^x$.

1. Montrer que pour $x \geqslant 0$ fixé on a
$$\sum_{p=1}^{n-1} p^x \sim \frac{n^{x+1}}{x+1}$$
2. Montrer que (E) admet une unique solution u_n sur $[0\,;+\infty[$.
3. On définit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\left(1 - \frac{p}{n}\right)^x$.
   a) Montrer que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   b) Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.
4. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
   a) Écrire en Python une fonction `v(n)` pour calculer v_n.
   b) Tracer les 30 premiers termes de (v_n) et émettre une conjecture.
   c) Tracer les 30 premiers termes de $4^n e^{-2u_n}$ et émettre une conjecture.

Exercice 95 ★★☆☆ *Telecom 2021 – Henri T.*

Étudier la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

Exercice 96 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Uther C.*

Pour $n \geqslant 3$ un entier naturel, on pose

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + x - 1$$

1. Pour $X > 3$, existence et calcul de $\displaystyle\int_3^X \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs, tendant vers 0 et telles que $a_n \sim b_n$. Montrer que $\ln a_n \sim \ln b_n$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, il existe un unique $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Montrer que $u_n \in \,]0\,;\,1[$.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^{n-1}(1 - u_{n+1}^2)$.
5. Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 97 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Marceau O.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} < 2 - \dfrac{1}{u_n}$

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 98 ★★★☆ *Mines 2021 – Rafael M.*

Soit $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\right)$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$?

Exercice 99 ★★★☆ *Mines 2021 – Florian D.*

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que $a_n + (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ admet une limite $\ell > 0$.
2. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_n}$.

Exercice 100 ★★★☆ 💻 *Centrale 2 2021 – Rémy D.*

Pour $x \in [0\,;\,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $t_n(x) = \lfloor 3^n x\rfloor - 3\left\lfloor 3^{n-1}x\right\rfloor$. On appelle T l'ensemble des suites à valeurs dans $[\![0\,;\,2]\!]$, indexées par $\mathbb{N}^*$. On définit l'application $o : (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{3^n}$.

1. o est-elle bien définie ?
2. Montrer que $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$.
3. Pour $N = 100$ et pour x variant de $0,00$ à $0,99$, programmer et tracer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}$. Que peut-on conjecturer ?
4. On pose $x_n = \lfloor 3^n x\rfloor\, 3^{-n}$ et $y_n = x_n + 3^{-n}$. Montrer que (x_n) et (y_n) sont deux suites adjacentes et démontrer la conjecture de la question précédente. Qu'en déduit-on sur l'application o ?

Exercice 101 ★☆☆☆ *CCP 2018*

On pose $P_n(x) = -4 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera x_n.
2. Calculer x_1 et x_2 et montrer que $x_5 < 1$. Étudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) converge, on note ℓ sa limite.
3. Montrer que $x_n^{n+1} - 5x_n + 4 = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$.
4. On pose $\delta_n = x_n - \ell$. Exprimer δ_n et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\delta_n = 0$.
5. Trouver un équivalent en $+\infty$ de δ_n.

Exercice 102 ★★★☆ *Mines 2018*

On dispose d'une suite (u_n) à termes strictement positifs. Soit (x_n) une suite définie par $x_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n}\right)$$

1. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. La suite (x_n) converge-t-elle ?
2. On suppose que la suite (x_n) converge. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 103 ★★★☆ *Mines 2018*

On considère une suite (u_n) à termes strictement positifs et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{S_n}$ diverge. Indication : Considérer la série de terme général $\ln S_{n-1} - \ln S_n$.

Exercice 104 ★☆☆☆ *CCP 2018*

On définit une suite (u_n) par $u_0 \in \,]-1\,;\,0[$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x + x^2$. Montrer que pour tout $x \in \,]-1\,;\,0[$, on a $f(x) \in \,]-1\,;\,0[$. En déduire que $u_n \in \,]-1\,;\,0[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.
3. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$?
4. Déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ en fonction de u_0.

5. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$.
Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n(-1)^n$?
6. On pose $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$. Étudier la convergence de la suite (a_n). On admet le théorème de Cesaro, déterminer un équivalent de u_n.
7. Démontrer le théorème de Cesaro.

Exercice 105 ★☆☆☆ *CCP 2021 – Zaccarie K.*

On définit deux suites par : $u_0 \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$ et $v_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite. (On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \sin x - x$) Montrer que (v_n) existe et qu'elle converge vers 0.
3. a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda u_n^3$, déterminer $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$.
   b) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge. On peut étudier $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
4. Par encadrement de v_n, montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
En déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Remarque : Déjà tombé tel quel en 2018 !

Exercice 106 ★★★☆ *Centrale 2018*

Nature de $\sum_{n\geqslant 1} S_n$, avec $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2+(n-p)^2}$.

Exercice 107 ★★★☆ *Mines 2018*

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\left(2 - \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)$.

Exercice 108 ★★★☆ 💻 *Centrale 2018*

On pose $P_n = \prod_{i=0}^{n}(X-i)$ et $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$.

1. Montrer que P' est scindé à racines simples.
2. Montrer qu'il existe une unique racine u_n de P_n' dans $]0\,;\,1[$.
3. Représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide de Python.
4. Étudier les variations de la fonction f_n sur $]0\,;\,1[$. En déduire qu'il existe une unique solution v_n à l'équation $f_n(x) = 0$ sur $]0\,;\,1[$.
5. Représenter les premiers termes de la suite (v_n) à l'aide de Python. Comparer les deux suites et donner une conjecture.
6. Démontrer la conjecture.
7. Montrer la convergence de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\geqslant 1}$.
8. Montrer que (u_n) converge et donner un équivalent.

Exercice 109 ★★★☆ *Mines 2018*

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \arctan \frac{2}{n^2}$ converge.
2. Montrer qu'il existe $k \in \{-1, 0, 1\}$ tel que
$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy} + k\pi$$
et préciser les cas.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$.

Exercice 110 ★★★☆ *Mines 2018*

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient les trois propriétés :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$$
$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

1. Montrer que la suite (u_n) de terme
$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$
appartient à $\mathcal{F}$.
Indication : Vérifier $\ln(1+x+y) < \ln(1+x) + \ln(1+y)$ pour x, $y > 0$.
2. Soit t tel que $0 \leqslant t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que $t = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

Exercice 111 ★★★★ *X 2009*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, $(u_{p+q})^{p+q} \leqslant (u_p)^p (u_q)^q$.

1. Montrer que $u_{pk} \leqslant u_k$ pour tous $p,\ k \geqslant 1$.
2. Que dire de la suite s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 0$?
3. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\{u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 112 ★★★★ *X 2016*

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = n(x_n - n)$. Montrer que $x_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n)$ si et seulement si $x_1 = 2e$.

Exercice 113 ★★★★ *X 2018*

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge. Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^{2018}$.

— Intégration sur un segment —

Exercice 114 ★★★☆ *Centrale 1 2024 – Yann B.*

• Montrer

$$\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)x + 1\right) = (x^n - 1)^2$$

• Calculer

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2\cos\theta\, x + 1)d\theta$$

Commentaire : Je ne suis pas allé plus loin, ce n'est pas une grande réussite.

Exercice 115 ★☆☆☆ *CCP 2024 – Luc O.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que
$$\int_x^y e^t dt = 1$$
et calculer y en fonction de x.
2. On pose $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
Montrer que F est bien définie, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante.
3. Montrer que F est impaire et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
4. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que
$$\int_x^y e^{t^2} dt = 1$$
On note $g(x) = F^{-1}(1 + F(x))$. Montrer que g est strictement croissante.
5. Montrer que $F(x) \leqslant 1 + F(x) \leqslant F(x + e^{-x^2})$.
En déduire que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Commentaire : Il y avait un exo 2 de réduction. Indication donnée pour la question 3 : on pourra montrer que $F(x) > x$.

Exercice 116 ★★☆☆ *Telecom 2024 – Louis K.*

On se donne $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$

1. On suppose que $f(1) = 0$. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt$$
2. Et si $f(1) \neq 0$?

Commentaire : Il s'agit de l'exo 1. Il y avait un exo 2 d'algèbre linéaire.

Exercice 117 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Léana Y.*

1. Montrer que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}e^{-1/t} = 0$.
En déduire que $h(x) = \int_0^x \frac{1}{t}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t$ est défini pour tout $x > 0$.
2. Montrer que les solutions de $x^2y' + y = x$ sur $]0\,;+\infty[$ sont de la forme $x \mapsto ke^{1/x} + e^{1/x}h(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
4. Montrer que $e^x h(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$.
On pourra effectuer le changement de variable $t = \frac{x}{1+xu}$.
5. Montrer que $g(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$ est l'unique solution réelle de $x^2y' + y = x$.
6. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$.
7. Trouver la limite de g en $+\infty$.
8. *Exercice 2 :*
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -16^2$.

Exercice 118 ★☆☆☆ *CCP 2023 – Pénéloppe H.*

Pour p et q entiers naturels on pose

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$ puis calculer $I_{p,q}$.

Commentaire : C'était le deuxième exercice.

Exercice 119 ★★★★ *ENS 2022 – Hadrien B.*

(exo 1)
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x$$

est un multiple de π.
(exo 2)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (P(X))^2$$

Commentaire : Oral lunaire. Je suis sorti dix minutes avant la fin car j'avais fini. J'ai trouvé les exercices faciles alors que je redoutais beaucoup l'épreuve. Examinateur incroyablement bienveillant.

Exercice 120 ★★★☆ *Mines 2021 – Rafael M.*

1. Donner l'expression de $\cos^2 u$ et $\sin^2 u$ en fonction de $\cos(2u)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ : x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, \mathrm{d}x$. On pourra poser $x = \dfrac{1-t}{2}$.
4. On pose $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$. Limite de u_n quand $n \to +\infty$?
5. On pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n}\right)^{1/n}$. Limite de v_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 121 ★★★☆ *Mines 2018*

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 122 ★★★☆ *Centrale 2017*

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$T(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? Surjectif ?
2. Montrer que l'image de T est l'ensemble des $g \in E$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, tels que $g'(t) = \underset{t \to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
3. Que dire de $T(f)$ si f est monotone ?

Exercice 123 ★★★☆ *Mines 2018*

1. Montrer que pour tous réels p et q on a : $\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \mathrm{d}t$ convergent et sont égales.
3. On pose :
$$A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\, \mathrm{d}t, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\, \mathrm{d}t,$$
$$B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2(t)}\, \mathrm{d}t$$
Montrer que $B_n \leqslant A_n \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$.

Exercice 124 ★★★★ *X 2014*

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(2x) - f(x) = x$ pour tout réel x.

Exercice 125 ★★★★ *ENS 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0\,;\,1], \mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, \mathrm{d}x \leqslant 4 \int_0^1 x^2 f'(x)^2\, \mathrm{d}x$ et déterminer le cas d'égalité.