12. Oraux – Concours X-ENS

☆☆☆☆	Exercice d'application simple
★☆☆☆	Petit échauffement tranquille
★★☆☆	Encore très abordable
★★★☆	Mérite réflexion
★★★★	Exercice bien énervé
♥	Basique à maîtriser quasi par cœur
💡	Exercice standard / super classique
✎	Solution longue, il faut s'accrocher
💻	Contient du PYTHON

Exercice 1 ★★ *ENS 2025 – Arthur L.*

Soient $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{rg}(\boldsymbol{M}) = k \text{ et } \mathrm{rg}(\boldsymbol{N}) = p$$

Quelles valeurs peut prendre $\mathrm{rg}(\boldsymbol{MN})$?

Exercice 2 ★★ *ENS 2025 – Raphaël*

Exercice 1
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $c \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'(x))^2 \leqslant cf(x)$$

Exercice 2
Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles telles que $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}) \cap \mathrm{Sp}(\boldsymbol{B}) = \varnothing$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Phi : \boldsymbol{M} \longmapsto \boldsymbol{AM} - \boldsymbol{MB}$$

Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 ★★ *ESPCI 2025 – Raphaël*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$.
On suppose que P n'admet aucune racine sur le cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$ fixé.
On note $N_r(P)$ le nombre de racines de P (comptées avec leur multiplicité) situées dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon r.
Montrer que :

$$N_r(P) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})} ire^{i\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

Commentaire : Oral raté, j'ai fait beaucoup d'erreurs idiotes :/

Exercice 4 ★★ *ENS 2024 – Cody D.*

On pose $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ avec

$$g(0) = g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad g''(0) > 0.$$

On pose $A(\lambda) = \{x > 0 \mid g(x) = \lambda x\}$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0\,; \lambda_0[$, on ait $A(\lambda) \neq \varnothing$.
2. On pose $\lambda_* = \sup\{\lambda > 0 \mid A(\lambda) \neq \varnothing\}$. ($\lambda_*$ peut être $+\infty$).
3. Montrer que λ_* existe et est un max.

Exercice 2.

1. On suppose $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$q \int_0^1 x^q e^x \,\mathrm{d}x \in \mathbb{N}^*,$$
puis que e est irrationnel.
2. Adapter cette démonstration pour montrer que e^2 est irrationnel.

Examinateur sympa, il m'a conseillé de faire des graphiques au début, ce qui m'a bien aidé.

Exercice 5 ★★ *ENS UL 2024 – Yann B.*

Exercice 1 :

— Résoudre pour $f : [0,1] \to]0,1[$:
$$f' + f \cdot (1 - f) = 0.$$
— Déterminer l'ensemble
$$\left\{\alpha \mid \exists f \text{ solution}, \int_0^1 f = \alpha\right\}.$$
— Déduire : Soit A le paramètre dont dépend f, décrire $A \mapsto \int_0^1 f_A$ (question de mon voisin).

Exercice 2 :
V est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par produit. Montrer que $I_n \in V$.

Exercice 2' : (de mon voisin)

Caractériser le rang des matrices 2×2 non inversibles.

Commentaire : Examinateur causant mais avec une grande propension à prendre les devants.

Exercice 6 ★★ *X-ESPCI 2024 – Arthur L.*

Soit n un nombre pair de prisonniers numérotés de 1 à n. On dispose n boîtes devant eux numérotées de 1 à n. On a n cartons portant un numéro de 1 à n. Chaque carton est placé au hasard dans une boîte. Chacun leur tour, les prisonniers ouvrent des boîtes jusqu'à tomber sur leur numéro. Si leur numéro a déjà été trouvé par un prisonnier auparavant, ils n'ouvrent aucune boîte. Les prisonniers sont libérés si aucun prisonnier n'a ouvert plus de $n/2$ boîtes (strictement). Quelle est la probabilité que les prisonniers soient libérés ?
Commentaire : C'était dur quand même, examinateur un peu mou, j'aurais dû être plus réveillé.

Exercice 7 ★★ *X-ESPCI 2024 – Côme B.*

Soit
$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k^{(n)}z^k,$$
(Le n n'est pas une dérivée, juste un indice.)
On suppose que (f_n) converge simplement sur le disque ouvert
$$B_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}\,.$$
Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $z\in B_1$, il existe M tel que $|f_n(z)|\leqslant M$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur chaque disque ouvert B_r, avec $r\in\,]0,1[$.

Commentaire : Désastreux

Exercice 8 ★★ *X-ESPCI 2024 – Yann B.*

E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Une application $f:E\to E$ est dite *antilinéraire* si :
$$\forall\lambda\in\mathbb{C},\forall x,y\in E,\quad f(x+y)=f(x)+\bar{\lambda}f(y).$$
Chercher les dimensions d de E pour lesquelles il existe f antilinéaire telle que
$$f\circ f=-\mathrm{id}_E$$

— Polynômes —

Exercice 9 ★★ *X 2018*

Soient A, B, $C\in\mathbb{C}[X]$ tels que $A+B=C$. On suppose que A, B et C n'ont aucune racine commune et que l'un des trois polynômes est de degré >0. On pose $D=A'B-AB'$.

1. Soit z une racine de ABC de multiplicité n. Montrer que z est racine de D de multiplicité au moins $n-1$. On note μ le nombre de racines distinctes de ABC.
2. Montrer que
$$\mu\geqslant\deg(A)+\deg(B)+\deg(C)-\deg(D)$$
3. Montrer que $\mu>\max\{\deg(A),\deg(B),\deg(C)\}$.

Exercice 10 ★★ *X 2018*

Soient $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ et $M(f):n\in\mathbb{N}^*\mapsto\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)$.
Montrer que si f coïncide avec une fonction polynomiale sur $\mathbb{N}^*$, alors $M(f)$ aussi.

Exercice 11 ★★ *X 2012*

Soit $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_0<x_1<\cdots<x_n$. Pour $k\in\{0,\dots,n\}$ on pose
$$L_k=\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\frac{X-x_i}{x_k-x_i}$$
Si $p\in\{0,\dots,n+1\}$, calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}x_i^pL_i(0)$.

Exercice 12 ★★ *ENS 2016*

Soit $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$. Si $P\in\mathbb{C}[X]$, on pose
$$\|P\|=\max_{z\in\mathbb{U}}|P(z)|$$
Si $P\in\mathbb{C}[X]$ et $t\in\mathbb{C}$, on pose
$$g_t(X)=\frac{P(tX)-P(t)}{X-1}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Si $P\in\mathbb{C}[X]$ et $t\in\mathbb{C}$, montrer que g_t est un polynôme. Déterminer $g_t(1)$.
3. Soit $n\geqslant 1$. On note $z_1,\dots,z_n$ les racines de X^n+1. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que
$$g_t(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_kg_t(z_k)\frac{X^n+1}{z_k-X}$$
4. En déduire une expression simple de
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2z_k}{(z_k-1)^2}$$
5. Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $\|P'\|\leqslant n\|P\|$.

— Algèbre linéaire —

Exercice 13 ★★★★ *X 2018*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que les seuls sous-espaces stables à la fois par a et b sont $\{0\}$ et V. On considère $u \in \mathcal{L}(V)$ non nul qui commute avec a et b. Montrer que u est inversible.

Exercice 14 ★★★★ *X 2018*

Soit $(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^n$ qui engendrent dans $\mathbb{C}^n$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension r. Quelle est la dimension r' du $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_s)$ dans $\mathbb{R}^n$?

— Déterminants —

Exercice 15 ★★★★ *X 2016*

Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$. Montrer que $\det(\boldsymbol{M}) = \det(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{AB})$.

— Matrices —

Exercice 16 ★★★★ *Centrale 2018*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. On pose

$$g : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \boldsymbol{M} \mapsto \boldsymbol{AM} - \boldsymbol{MA}$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} g$ est l'ensemble des matrices à diagonale nulle.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. En déduire que pour toute matrice $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{M} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\exists (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{BC} - \boldsymbol{CB}$$

Remarque : C'est un exo centrale difficile, qui contient des résultats qui préparent bien pour xens aussi...

Exercice 17 ★★★★ *X 2009*

1. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de

$$\Phi : \boldsymbol{X} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \boldsymbol{XA} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

2. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques et $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la trace de

$$\Psi : \boldsymbol{X} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto \boldsymbol{XA} - \boldsymbol{AX} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 18 ★★★★ *X 2018*

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. Montrer que $\operatorname{tr}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19 ★★★★ *X 2018*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ telle que $\boldsymbol{AA}^\intercal = q\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{J}$. (où $\boldsymbol{J} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients égaux à 1)

1. Montrer que $\boldsymbol{A}$ est inversible.
2. Montrer que $\boldsymbol{AJ} = (q+1)\boldsymbol{J}$.

— Fonctions d'une variable réelle —

Exercice 20 ★★★★ *X 2023 – Eliane H.*

1. *Exercice 1*
   Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - f est croissante.
   - Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$: Si $f - g$ a un minimum local en x_0 alors $g'(x_0) \geqslant 0$.
2. *Exercice 2*
   Soient $a < b < c$ des réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
   On suppose que $f(b) < f(a)$ et $f(b) < f(c)$.
   Montrer que f admet un minimum local.

Commentaire : J'ai eu le même examinateur que l'an dernier (toujours aussi muet), il m'a reconnu, il a fait son malin, ça a marché : j'ai raté cet oral... J'aime pas les maths ! (Sans vouloir vous offenser M.Angeli)

Exercice 21 ★★★★ *X 2021 – Adam P.*

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x+y^3) + f(x-y^3)}{2}$$

Commentaire : « entraînez-vous aux équations fonctionnelles ! ! ! »

Exercice 22 ★★★★ *ENS 2018*

1. Soient f, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \leqslant g$ et il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = g(a)$. Montrer que les graphes de f et g admettent la même tangente en a.
2. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telles que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leqslant f(x)f(y)$$

Exercice 23 ★★★★ *X 2017*

1. Montrer que la fonction cos admet dans $\mathbb{R}$ un unique point fixe.
2. Montrer qu'il n'existe aucune fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 24 ★★★★ *X 2018*

1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour $e^x - 1$ à l'ordre n. On appelle T_n la partie polynomiale.
2. Montrer que pour n impair, T_n n'a pas de racine non nulle.
3. Montrer que pour n pair, T_n a des racines non nulles. Montrer que cette racine est unique.

— Suites, séries —

Exercice 25 ★★★★ *X 2022 – Eliane H.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un irrationnel.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, t_0-périodique, qui atteint son maximum global en $x_0 \in [0\,;t_0[$. On définit :

$$f_1(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$$

$$f_2(x) = \sin(x) + \sin(\alpha x)$$

$$f_3(x) = f(x) + f(\alpha x)$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont-elles périodiques ?
Commentaire : Examinateur très sympa et souriant qui a essayé de résoudre l'exercice avec moi en me donnant des indications. Par contre pour la fonction f_3 il m'a donné des indications mais je ne comprenais pas les termes qu'il a employés... J'ai donc fait semblant :)

Exercice 26 ★★★★ *X 2009*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\forall p,\, q \in \mathbb{N}^*$, $(u_{p+q})^{p+q} \leqslant (u_p)^p(u_q)^q$.

1. Montrer que $u_{pk} \leqslant u_k$ pour tous $p,\, k \geqslant 1$.
2. Que dire de la suite s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 0$?
3. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf\{u_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 27 ★★★★ *X 2016*

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = n(x_n - n)$. Montrer que $x_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}(n)$ si et seulement si $x_1 = 2e$.

Exercice 28 ★★★★ *X 2018*

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge. Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 0} a_n^{2018}$.

— Intégration sur un segment —

Exercice 29 ★★★★ *ENS 2022 – Hadrien B.*

(exo 1)
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

est un multiple de π.
(exo 2)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (P(X))^2$$

Commentaire : Oral lunaire. Je suis sorti dix minutes avant la fin car j'avais fini. J'ai trouvé les exercices faciles alors que je redoutais beaucoup l'épreuve. Examinateur incroyablement bienveillant.

Exercice 30 ★★★★ *X 2014*

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(2x) - f(x) = x$ pour tout réel x.

Exercice 31 ★★★★ *ENS 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0\,;1]\,,\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 x^2 f'(x)^2\,\mathrm{d}x$ et déterminer le cas d'égalité.

— Réduction —

Exercice 32 ★★★★ *X 2023 – Kenan S.*

On se donne une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de réels.
On appelle $\boldsymbol{H}_n$ la matrice carrée réelle d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont v_1, ..., v_n et les coefficients adjacents à la diagonale sont des 1 (tout le reste est nul).

1. Montrer que $\boldsymbol{H}_n$ admet n valeurs propres distinctes.
2. Montrer que les valeurs propres de $\boldsymbol{H}_n$ et de $\boldsymbol{H}_{n-1}$ sont entrelacées.

Commentaire : Examinateur pas très rigolo, parlait très peu, mais j'avais un auditeur, un PCSI d'h4 très sympa. Ça s'est assez bien passé je trouve, malgré *qu'on me demande d'utiliser la division pas euclidienne de polynômes. J'ai eu 12. Il semblerait qu'il ait mal pris le fait que je divise mes polynômes euclidiennement. Éléments de réponse : 1) On note $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n)$ deux vecteurs propres de H_n. S'intéresser à $x_{k+1}y_k - x_k y_{k+1}$. 2) Trouver une relation de récurrence entre les polynômes caractéristiques. Diviser le polynôme de H_n par celui de H_{n-1}, mais pas par division euclidienne.*

Exercice 33 ★★★★ *X-ESPCI 2021 – Rémy D.*

On se donne a, b, $c \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ trois endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} ab - ba & = & c \\ bc - cb & = & a \\ ca - ac & = & b \end{cases}$$

1. Montrer que si x est vecteur propre commun à a et b, alors $x \in \ker a \cap \ker b \cap \ker c$.
2. On suppose que $\ker a \cap \ker b \cap \ker c = \{0\}$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 34 ★★★★ *X-ESPCI 2021 – Elouan O.*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u \circ u = u$.

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, de même rang r et vérifiant $u \circ u = u$ et $v \circ v = v$. Montrer qu'il existe deux endomorphismes a et b de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} u & = & a \circ b \\ v & = & b \circ a \end{cases}$$

Exercice 35 ★★★★ *X 2018*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\operatorname{rg} u^2 = \operatorname{rg} u \Leftrightarrow E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 36 ★★★★ *X 2018*

Soit u un endomorphisme tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ u^2(x) = \lambda u(x) + \mu x$$

1. Montrer que u a au plus deux valeurs propres distinctes.
2. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$u^2(x) = \alpha u + \beta \,\mathrm{id}$$

Exercice 37 ★★★★ *X 2018*

Soient $\boldsymbol{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, montrer que :

$$\lambda_k = \min_{F \text{ sev de dim } k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle \boldsymbol{A}x, x \rangle \right)$$

Exercice 38 ★★★★ *X 2018*

Soit $G \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ fini, non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\{z^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer que z est une racine de l'unité.
2. Montrer que pour tout $g \in G$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = I_d$.
3. Soit $g \in G \setminus \{I_d\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(g) \neq d$.

Exercice 39 ★★★★ *X 2017*

1. Soit $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\overline{\det \boldsymbol{M}} = \det \overline{\boldsymbol{M}}$.
2. Soient $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}_+$.
   Montrer que $\det(\boldsymbol{A}^2 + t\boldsymbol{I}_n) \geqslant 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que la matrice $-\boldsymbol{I}_n$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$, avec $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40 ★★★★ *X 2016*

Soient u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients non diagonaux de module $\leqslant \varepsilon$.

Exercice 41 ★★★★ *X 2016*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

— Algèbre bilinéaire —

Exercice 42 ★★★★ *ENS 2023 – Eliane H.*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\ker \boldsymbol{A} = (\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^\intercal)^\perp$.
Commentaire : C'était le deuxième exo sur trois. Le premier exo était un exercice d'analyse et le troisième c'était des probas toutes nulles. Je suis passée juste après Kenan. L'examinateur était très sympa mais ne parlait pas beaucoup, au final je ne sais pas quoi en penser :/

Exercice 43 ★★ *ENS 2023 – Thomas D.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie pour tous vecteurs x, y :

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal. *Commentaire : C'était l'exo 2. J'ai appris beaucoup de choses...*

Exercice 44 ★★ *X 2021 – Adam P.*

Soit $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$$

Montrer que $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ii}$.

Exercice 45 ★★ *ENS 2021 – Adam P.*

1. Soit $\boldsymbol{M} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Trouver une CNS sur les coefficients de $\boldsymbol{M}$ pour que ses valeurs propres soient positives.
2. Soient $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On dit que $\boldsymbol{T} \geqslant \boldsymbol{S}$ si et seulement si $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Est ce que $\boldsymbol{T} \geqslant \boldsymbol{S} \Rightarrow \boldsymbol{T}^2 \geqslant \boldsymbol{S}^2$?

Exercice 46 ★★ *X 2019*

Soient n, $p \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$, et $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg}(\boldsymbol{M}) = p$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^p$ tel que
$$\|\boldsymbol{M}x - y\| = \inf_{x'\in\mathbb{R}^p} \|\boldsymbol{M}x' - y\|$$
2. Montrer que $\boldsymbol{M}^\intercal \boldsymbol{M}$ est inversible.
3. Donner une relation entre $\operatorname{Im} \boldsymbol{M}$ et $\ker \boldsymbol{M}^\intercal$.
4. En déduire une expression de x'.

Exercice 47 ★★ *ENS 2016*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On se donne a et c dans $\mathbb{R}$, et b dans $\mathbb{R}^n$. Décrire géométriquement

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid\ a\|x\|^2 + \langle b, x\rangle + c = 0\}$$

Exercice 48 ★★ *ENS 2014*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer les $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continues, impaires et telles que, pour tous a, $b \in \mathbb{R}^3$, $a \perp b$ implique $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$.

Exercice 49 ★★ *X 2015*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Déterminer

$$\{\langle \boldsymbol{A}x, x\rangle,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

Exercice 50 ★★ *X 2012*

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :

(i) f est une isométrie,
(ii) $f^2 = -\operatorname{id}_E$,
(iii) $\forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle = 0$.

Exercice 51 ★★ *X 2015*

Soient u, $v \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ deux endomorphismes orthogonaux tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|u(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| \text{ et } \|v(x) - x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|u^{-1}\circ v^{-1}\circ u\circ v(x) - x\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 52 ★★ *X 2013*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre multiple. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $(x, \boldsymbol{A}x, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}x)$ est liée.

Exercice 53 ★★ *X 2014*

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et a, a', b, b' des réels avec $a \leqslant a'$ et $b \leqslant b'$. On suppose $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A}) \subset [a\,;\,a']$ et $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{B}) \subset [b\,;\,b']$. Montrer que

$$\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \subset [a + b\,;\,a' + b']$$

Exercice 54 ★★ *X 2021 – Cyprien F.*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent b, et les autres coefficients valent a. Donner une CNS sur (a, b) pour que $\lim\limits_{p\to+\infty} \boldsymbol{A}^p$ existe.

Exercice 55 ★★ *X 2018*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ne possédant pas 1 comme valeur propre. Étudier la convergence de la suite de terme général $\boldsymbol{U}_k = \dfrac{1}{k}\left(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} + \cdots + \boldsymbol{A}^{k-1}\right)$.

Exercice 56 ★★ *ENS 2018*

On munit $E = \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant d} |a_{i,j}|$.

1. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum \dfrac{\boldsymbol{A}^n}{n!}$ converge.

   On note $\exp(\boldsymbol{A}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!}$.
2. Calculer $\exp(\boldsymbol{A})$ pour
$$\boldsymbol{A} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. On fixe $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et on note :

$$\boldsymbol{T}_n = \exp\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{A}\right)\exp\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{B}\right)$$

$$\boldsymbol{S}_n = \exp\left(\frac{1}{n}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\right)$$

Montrer que $\|\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{T}_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} O(1/n^2)$.

4. Déterminer la limite de $(\boldsymbol{T}_n{}^n)$.

Exercice 57 ★★★★ *X 2018*

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide. Montrer que $\sup\{|P(z)|,\ z \in K\}$ est atteint sur la frontière de K.

Exercice 58 ★★★★ *X 2017*

Soient $\boldsymbol{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{E} = \left\{\boldsymbol{PMP}^{-1},\ \boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est borné si et seulement si $\boldsymbol{M}$ est une homothétie.

— Géométrie dans le plan —

Exercice 59 ★★★★ *X 2018*

Montrer que la somme des distances au carré d'un point aux sommets d'un polygone régulier de côtés $n \geqslant 3$ ne dépend que de la distance au centre du polygone.

Exercice 60 ★★★★ *X 2018*

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, $A_0(-1,0)$ et $A \in \mathcal{C} \setminus \{A_0\}$. On note M le point d'intersection de la tangente au cercle en $(1,0)$ et de (A_0A). Montrer que M est à coordonnées rationnelles si et seulement si A est à coordonnées rationnelles.

— Intégrales généralisées —

Exercice 61 ★★★★ *X 2018*

Déterminer un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 62 ★★★★ *X 2009*

Existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 63 ★★★★ *X 2014*

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ intégrable et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 64 ★★★★ *X 2015*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \left(f'(t)^2 + t^2 f(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 65 ★★★★ *X 2015*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $x_n \to +\infty$ et $x_n f(x_n) \to 0$.

— Intégrales à paramètre —

Exercice 66 ★★★★ *X 2016*

Soit $f : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2 - 2i\pi xt)\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
2. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f. En déduire f.

Exercice 67 ★★★★ *X 2016*

Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est bien définie puis déterminer ses limites en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 68 ★★★★ *X 2013*

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x (1+\sin(2t))^{1/t}\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 69 ★★★★ *ENS 2016*

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-intégrale* qui est la fonction $I_{1/2}f$ définie par :

$$I_{1/2}f(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,\mathrm{d}t$$

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-dérivée* qui est la fonction $D_{1/2}f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ D_{1/2}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[I_{1/2}f(x)\right]$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Vérifier que $I_{1/2}f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que $D_{1/2}$ est bien définie et que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$D_{1/2}f(x) = I_{1/2}(f')(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{x}}$$

3. Pour $f : x \mapsto x^n$, calculer $I_{1/2}f$.

(On peut considérer $X_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \,\mathrm{d}\theta$.)

4. Pour $f : x \mapsto x^{n+1/2}$, calculer $I_{1/2}f$.

5. En déduire les relations suivantes pour tout fonction polynomiale f :

$$I_{1/2}I_{1/2}f = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad D_{1/2}I_{1/2}f = f$$

6. Généraliser les résultats de la fonction précédente pour f développable en série entière. Discuter enfin le cas où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 70 ★★★★ *X 2012*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 x \exp(-xt \ln t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa régularité.

2. Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.

— Séries entières —

Exercice 71 ★★★★ *ENS 2021 – Elouan O.*

Soit u une fonction DSE au voisinage de 0, avec

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Soit φ vérifiant l'équation différentielle $x\varphi'' = u\varphi$.

1. Y a-t-il unicité de la solution en 0 ?

2. Existe-t-il une solution φ DSE au voisinage de 0 ?

Exercice 72 ★★★★ *X 2018*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a_0 + \cdots + a_n$. Montrer que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 73 ★★★★ *ENS 2016*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de f_n : $t \mapsto \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} t^i$ quand $t \to 1^-$.

2. Soit (a_n) une suite réelle qui tend vers 1. Soit $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Déterminer le rayon de convergence de g et donner un équivalent de $g(t)$ quand $t \to 1^-$.

Exercice 74 ★★★★ *X 2014*

Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Exercice 75 ★★★★ *X 2014*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \,]0\,;1[\, \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}$.

Montrer que (f_n) converge simplement et déterminer sa limite.

— Suites et séries de fonctions —

Exercice 76 ★★★★ *ENS Ulm 2021 – Raphaël M.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ bornée telle que $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0. On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} 2^{-k} f(3^k x)$.

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge quand $n \to +\infty$ vers une application continue F qui vérifie l'équation $F(3x) = 2F(x)$. Que dire du mode de convergence ?

Exercice 77 ★★★★ *ENS Lyon/Ulm 2021 – Rémy D.*

Lorsque A est une partie de $\mathbb{N}^*$, on pose pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\zeta_A(s) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n^s}$$

On pose aussi

$$o(A) = \inf\{s \in \mathbb{R},\ \zeta_A(s) \text{ converge}\}$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $A_d = \{n^d,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Que vaut $o(A_d)$?

2. Soit $d \in [\![1\,;9]\!]$ et A l'ensemble des entiers dont tous les chiffres sont $< d$. Que vaut $o(A)$?

Exercice 78 ★★ *X 2018*

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose les f_n croissantes et la fonction f continue. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément.

Exercice 79 ★★ *X-ESPCI 2022 – Hadrien B.*

On se donne une suite de fonctions $f_n : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}$ dérivables.
On suppose que $(f_n' - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
Commentaire : Oral catastrophe alors que c'était pas dur.

Exercice 80 ★★ *X 2016*

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante et telle que, pour tout $t > 0$, $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$. Quand $t \to 0^+$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t\varphi(x)}\,\mathrm{d}x \sim \int_1^{+\infty} e^{-t\varphi(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 81 ★★ *X 2016*

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 + x^{2^k}\right)$.

Déterminer la limite de $(P_n(x))_{n\geqslant 0}$.

Exercice 82 ★★ *ENS 2016*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série réelle absolument convergente.

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. Donner une condition suffisante pour que F soit intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

— Équations différentielles —

Exercice 83 ★★ *X 2021 – Cyprien F.*

Soit $b \geqslant 0$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$f^2 \leqslant b^2 - (b - f')^2$$

Exercice 84 ★★ *X-ESPCI 2021 – Elouan O.*

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$(E_n) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -\dfrac{1}{n} y \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

On note f_n une solution de (E_n).

1. Existence et unicité des f_n ? Vers quelle fonction les f_n convergent-elles simplement ?
2. Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 85 ★★ *ENS 2018*

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. Existe-t-il u 1-périodique telle que $u' + u = f$? Si oui, y a-t-il unicité ?

— Calcul différentiel —

Exercice 86 ★★ *ENS 2018*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, il existe une sphère qui coupe $\mathcal{C}_f$ en $(a; f(a))$ et qui est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 87 ★★ *ENS 2017*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y)\,,\, x - y \rangle \geqslant a\,N(x-y)^2$$

Montrer que : $\displaystyle\lim_{N(x)\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 88 ★★ *ENS 2018*

Soit f, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) = g(a)$ et $f \leqslant g$. Montrer que les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g admettent le même plan tangent en a.

Exercice 89 ★★ *X 2017*

Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par l'égalité $f(X) = g\left(\|X\|^2\right)$. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = 0$.

— Probabilités —

Exercice 90 ★★ *X 2018*

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que $r \in [\![1\,;\,2n-1]\!]$ personnes disparaissent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

Exercice 91 ★★ *ENS 2018*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On définit

$$\mathrm{d}(X, Y) = \sup_{A\subset\mathbb{Z}} \left[\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)\right]$$

Soit $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.

1. Montrer que d est atteint en B.

2. Montrer que

$$\mathrm{d}(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big|\mathbb{P}(X=k)-\mathbb{P}(Y=k)\Big|$$

3. Montrer que $\mathrm{d}(X,Y) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Exercice 92 ★★★★ *ENS 2018*

Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un n-uplet. On dit que $(A_{i_1}, \cdots, A_{i_k})$ est une *sous-suite croissante* de longueur k lorsque

$$\begin{cases} i_1 < \cdots < i_k \\ A_{i_1} < \cdots < A_{i_k} \end{cases}$$

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un n-uplet aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$. Soit $\ell_n(k)$ le nombre de sous-suites croissantes de longueur k de $(X_1, \cdots, X_n)$. Déterminer l'espérance de $\ell_n(k)$.

Exercice 93 ★★★★ *X 2018*

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Donner une CNS pour que pour toute partie A bornée de $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_n \in A) < +\infty$.

Exercice 94 ★★★★ *X 2018*

On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et prend une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée. Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

Exercice 95 ★★★★ *ENS 2016*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = 2^j) = \frac{1}{2^j}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\ln(2)S_n}{n\ln n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

Exercice 96 ★★★★ *ENS 2017*

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. A-t-on toujours $\mathbb{P}\,|X_1 + \cdots + X_n| \geqslant n\varepsilon) \to 0$ quand $n \to +\infty$?

— Divers —

Exercice 97 ★★★★ *X 2015*

Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 98 ★★★★ *X 2013*

Soient A un ensemble de réel de cardinal $n \geqslant 2$ et $B = \{a + a',\ (a,a') \in A^2\}$. Montrer que $2n - 1 \leqslant \operatorname{Card} B \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ et donner des exemples de parties pour lesquelles les bornes sont atteintes.

Exercice 99 ★★★★ *X 2015*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un ensemble de $2n+1$ personnes a la propriété suivante : la masse de chacun des membres de ce groupe mesurée en kg est un nombre entier. En retirant n'importe lequel des membres de ce groupe, il est possible de séparer les autres en deux parties de n personnes, ces deux parties ayant même masse. Que peut-on en conclure sur la masse de chaque individu ?

Exercice 100 ★★★★ *X 2013*

Soit $n \geqslant 2$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $(f, f', \ldots, f^{(n-1)})$ soit libre et $f^{(n)} = f$.

Exercice 101 ★★★★ *X 2013*

Soit $A = \left\{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que A contient une infinité de puissances de 2.

Exercice 102 ★★★★ *ENS 2014*

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ le nombre de racines de P dans $\mathbb{R}_+^*$, comptées avec multiplicité.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines réelles sont simples. Montrer que $Z(P') \geqslant Z(P) - 1$.

2. Soit $P = a_1X^{n_1} + a_2X^{n_2} + \cdots + a_pX^{n_p}$ où les a_i sont non nuls et $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$. On note $V(P)$ le nombre de changements de signe de $(a_1, \ldots, a_p)$. Montrer que $V(P) \geqslant Z(P)$. Montrer que $V(P) - Z(P)$ est un entier pair.

3. Montrer sans calcul que $P(X) = X^7 + 2X^6 - 3X^5 - X^2 + 7X - 8$ a au moins deux racines complexes non réelles.

Exercice 103 ★★★★ *X 2015*

Soient A un ensemble et $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de A dans $\mathbb{R}$. Soit F un sev de E de dimension n. Montrer l'existence de f_1, ..., f_n dans F et de x_1, ..., x_n dans A tels que la matrice de coefficients $(f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit égale à I_n.

Exercice 104 ★★★★ *ENS 2014*

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $A \subset E$ une partie non vide.L'enveloppe convexe de A est définie par :

$$\mathrm{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ai, \quad n \geqslant 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ a_i \in A \right\}$$

1. Dessiner $\mathrm{co}(A)$ lorsque A est un ensemble fini de petit cardinal en dimension 2.

2. On veut montrer le résultat suivant : si $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ sont dans $\mathbb{R}^n$, alors on peut répartir ces $n+2$ points en deux ensembles A et B disjoints dont les enveloppes convexes sont non disjointes. Montrer que si $n = 2$ alors ce résultat est vrai...

   a) ... pour les sommets d'un carré.

   b) ... pour la réunion des sommets d'un triangle équilatéral et de son centre de gravité.

3. Soient $x_1, \ldots, x_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ non nul tel que

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+2} x_{n+2} = 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+2} = 0 \end{cases}$$

4. Déterminer $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ pour les exemples de la question ***2***.

5. Conclure.