

# 14. Oraux – Thèmes d’algèbre

- ☆☆☆☆ Exercice d’application simple
- ★☆☆☆ Petit échauffement tranquille
- ★★☆☆ Encore très abordable
- ★★★☆☆ Mérite réflexion
- ★★★★ Exercice bien énervé

- ♥ Basique à maîtriser quasi par cœur
- 💡 Exercice standard / super classique
- 📖 Solution longue, il faut s’accrocher
- 💻 Contient du PYTHON

## — Réduction —

### Exercice 1 ★★ ☆☆ Centrale 2025 – Ambre

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  diagonalisable ayant pour valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  distinctes deux à deux. On note, pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

- Calculer, pour  $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ , la somme

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^k L_i$$

- Montrer que  $L_i(f)$  est un projecteur dont on donnera les caractéristiques.

*Commentaire : L’examinatrice était très douce, elle me laissait chercher mais m’a aidé un peu aussi. Dans l’ensemble ça a été, j’avais les idées mais j’avais du mal à conclure. J’ai traité les deux questions mais je n’ai pas du tout fini la 2e.*

### Exercice 2 ★★ ☆☆ Centrale 2025 – Élea

Soient  $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$  tels que  $AB - BA = B$ .

- Mq  $AB^k = B^k(A + kI_n)$ .
- En déduire que  $\det B = 0$ .

### Exercice 3 ★★ ☆☆ Centrale 2025 – Raphaël

Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  inversible telle que  $M^2$  est diagonalisable.

- Montrer que  $M$  est diagonalisable.
- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Montrer que  $P(M)$  est inversible si et seulement si  $P(\lambda) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ .

On suppose qu’il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $Q(M)$  est diagonalisable et  $Q'(M)$  est inversible.

- Montrer qu’il existe  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $R(M) = 0$  et  $R'(M)$  est inversible.
- En déduire que  $M$  est diagonalisable.

*Commentaire : Je ne suis plus certain de la question 4, c’est peut-être pas ça.*

### Exercice 4 ★★ ☆☆ 2025 – Émile

(exo sans préparation)

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

- Montrer que 1 est valeur propre. Déterminer le sous-espace propre associé.
- D’autres valeurs propres ?

### Exercice 5 ★★ ☆☆ Mines 2025 – Joseph

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice qui admet  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer que :

$$AM = MA \iff M \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

### Exercice 6 ★★ ☆☆ 2025 – Amélie

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

- Soit la matrice :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exprimer  $A$  en fonction de  $a, b, c, I_3, J$  et  $J^2$ .

2.  $A$  est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

**Exercice 7** ★★☆☆ Telecom 2025 – Paul

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la matrice :

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $A(a)$  soit diagonalisable.
- Si possible, la diagonaliser.

**Exercice 8** ★☆☆☆ CCP 2025 – Emma

Soit  $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale.

- En comparant le rang de  $D$  et de  $D^p$ , montrer que  $\ker(D) = \ker(D^p)$ .
- Dans cette question seulement,  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable avec  $M = P^{-1}DP$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

- Montrer que  $M^p$  est diagonalisable.
- Montrer que  $\ker(M) = \ker(M^p)$ .

- On suppose désormais que  $M^p$  est diagonalisable.

- Soient  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^*$  avec  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Montrer que le polynôme  $(X^p - \alpha_1)(X^p - \alpha_2)$  est scindé à racines simples non nulles.

- Montrer qu’il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$  tels que  $\prod_{i=1}^r (X^p - \lambda_i)$  est un polynôme annulateur de  $M$ .

- a) Dans cette question uniquement, on suppose que  $\text{Sp}(M^p) = \{0\}$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.

- On suppose dans cette question uniquement que  $0 \notin \text{Sp}(M^p)$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.

- On suppose que  $0 \in \text{Sp}(M^p)$  et  $\text{Sp}(M^p) \neq \{0\}$ . Montrer qu’il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$  tels que

$$X \cdot \prod_{i=1}^r (X^p - \lambda_i)$$

est un polynôme annulateur de  $M^p$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.

*Commentaire : Je n’ai pas fait la bonne méthode à la question 1, enfin pas dans le bon sens en tout cas, donc j’ai dû improviser. J’ai paniqué, donc j’ai fait n’importe quoi. Les erreurs d’étourderie se sont multipliées, bref j’ai perdu mes moyens... Donc je n’osais plus rien proposer par peur de dire une bêtise,*

*donc on avançait lentement. J’ai pu lui faire rapidement quelques autres questions que j’avais faites au brouillon, c’était bon. Je n’ai pas eu le temps de lui montrer tout ce que j’avais fait au brouillon, dommage car il y avait des trucs bons... L’examinateur n’était pas horrible mais pas sympa non plus. Quand je disais un truc faux il disait un sec « Ah bon ? » et quand j’avais bon il ne disait plus rien. Il était plus passif qu’autre chose.*

**Exercice 9** ★☆☆☆ CCP 2025 – Charles

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

- Rang de  $M$  ?
- Spectre de  $M$  ?
- $M$  est-elle diagonalisable ?

**Exercice 10** ★☆☆☆ CCP 2025 – Catherine

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

On note  $\mathcal{S}_P(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = A\}$ .

- Pour  $P(X) = aX + b$ , montrer qu’il existe une seule matrice  $M$  telle que  $M \in \mathcal{S}_P(A)$ .

On suppose maintenant que  $A$  est diagonalisable et  $A = RDR^{-1}$  avec  $D$  diagonale à éléments diagonaux distincts et  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

- Soit  $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que  $D$  et  $\Delta$  commutent ssi  $\Delta$  est diagonale.
- En déduire que si  $\Delta \in \mathcal{S}_P(D)$ , alors  $\Delta$  est diagonale.
- Montrer que  $\varphi : \mathcal{S}_P(A) \rightarrow \mathcal{S}_P(D)$ ,  $M \mapsto R^{-1}MR$  est bijective.
- En déduire que  $\text{Card}(\mathcal{S}_P(A)) \geq (\deg P)^n$ .
- En ne prenant plus en compte les hypothèses précédentes, montrer que  $\mathcal{S}_P(A)$  peut admettre une infinité d’éléments.
- (Question oubliée)

**Exercice 11** ★☆☆☆ CCP 2025 – Louis

$\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

On pose  $\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$ .

- Mq  $\varphi$  est linéaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}$ .
- On définit  $f_\alpha(P) = P + \alpha\varphi(P)X$ . On fixe  $n = 3$ .  
Donner la représentation matricielle  $A_\alpha$  de  $f_\alpha$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- Donner le spectre de  $A_\alpha$ .  $f_\alpha$  est-elle bijective ? Montrer que  $f_\alpha$  est diagonalisable ssi  $\alpha = 0$ .

Commentaire : D'autres qst non traitées dont je ne me souviens plus

**Exercice 12** ★★ CCP 2025 – Zakaria

- On se donne  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable. Montrer que  $M$  est semblable à sa transposée.
- Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable et montrer qu'elle est semblable à sa transposée. Trouver la matrice de passage de cette similitude.

Commentaire : Pour l'exo 2 l'examinateur était à deux doigts de dire que la matrice de passage est triviale (penser au pivot de Gauss il m'a dit ?). Le prof était assez grincheux même si pas trop méchant.

**Exercice 13** ★★ CCP 2023 – Yasmine A.

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on définit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Déterminer le rang de  $A$  (en fonction du paramètre  $a$ ).
- Donner une CNS sur  $a$  pour que  $A$  soit diagonalisable.

Commentaire : Deuxième exercice de l'oral, après un exo d'analyse.

**Exercice 14** ★★ X 2023 – Kenan S.

On se donne une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  de réels. On appelle  $H_n$  la matrice carrée réelle d'ordre  $n$  dont les coefficients diagonaux sont  $v_1, \dots, v_n$  et les coefficients adjacents à la diagonale sont des 1 (tout le reste est nul).

- Montrer que  $H_n$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.
- Montrer que les valeurs propres de  $H_n$  et de  $H_{n-1}$  sont entrelacées.

Commentaire : Examinateur pas très rigolo, parlait très peu, mais j'avais un auditeur, un PCSI d'h4 très sympa. Ça s'est assez bien passé je trouve, malgré qu'on me demande d'utiliser la division pas euclidienne de polynômes. J'ai eu 12. Il semblerait qu'il ait mal pris le fait que je divise mes polynômes euclidiennement. Éléments de réponse : 1) On note  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  deux vecteurs

propres de  $H_n$ . S'intéresser à  $x_{k+1}y_k - x_k y_{k+1}$ . 2) Trouver une relation de récurrence entre les polynômes caractéristiques. Diviser le polynôme de  $H_n$  par celui de  $H_{n-1}$ , mais pas par division euclidienne.

**Exercice 15** ★★ Centrale 1 2023 – Dimitri B.

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée.

- Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs (qu'on notera  $E$ ) de la matrice  $A$  est stable par produit.
- Lorsque  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ , donner un polynôme annulateur non nul de  $A$ , de degré minimal.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  unitaire tel que  $E = P \cdot \mathbb{R}[X]$ .

Commentaire : deuxième exercice, sans préparation. Il me restait à montrer l'unicité. Globalement content le deuxième exo est une question de cours donc je connaissais. Examinateur sympa même si des fois on ne se comprenait pas.

**Exercice 16** ★★ Mines Telecom 2023 – Victoria C.

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  (avec  $n \geq 2$ ) la matrice de coefficients

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .
- Déterminer les éléments propres de  $A$ .

Commentaire : Il y avait un deuxième exercice sur des séries entières. Youpi de l'algèbre et des séries entières pour commencer les oraux ! C'était trop bien ! Heureusement que les maths étaient là parce que l'examinateur n'était pas très gentil. Pour le premier exercice, il guidait vraiment beaucoup dès le début et de façon autoritaire... à chaque fois que j'écrivais la réponse, il me disait que c'était bon mais il demandait une seconde méthode, que je n'avais pas toujours... Et puis il posait un tas de questions... Quand je lui ai parlé de polynôme annulateur, l'atmosphère a commencé à se détendre, jusqu'à ce qu'il me demande de trouver les espaces propres de tête... (je lui ai donné les dimensions pour gagner du temps de réflexion)

**Exercice 17** ★★ CCP – Eliane H.

Soit  $d \geq 2$ . Pour  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  on pose

$$\|M\|_\infty = \max_{i,j \in \llbracket 1; d \rrbracket^2} |m_{ij}|$$

- On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Est-ce que  $A$  est diagonalisable ?
- On suppose que  $d = 3$  et on pose  $N = A - I_3$ . Déterminer  $N^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Déterminer  $A^n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A\|_\infty^n$ .
4. Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme.
5. Montrer que  $\|MN\|_\infty \leq d\|M\|_\infty\|N\|_\infty$  pour toutes matrices  $M, N \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ .
6. On suppose que  $M$  est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module  $> 1$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M^n\|_\infty$ .
7. On pose  $M = I + N$  avec  $N$  nilpotente d’ordre  $p \geq 2$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M^n\|_\infty$ .

**Exercice 18** ★★☆☆ Mines Telecom 2023 – Cody D.

On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. En effectuant le moins de calculs possible, déterminer le rang, le noyau et l’image de  $M$ .
2. En effectuant le moins de calculs possible, diagonaliser  $M$ .

**Exercice 19** ★★☆☆ CCP 2023 – Ferdinand C.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que  $u^p = \text{id}_E$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$  fixé. On pose

$$v = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p u^k$$

1. Calculer  $v \circ u^i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $v$  est un projecteur.
2. Montrer  $\ker(u - \text{id}_E) = \ker(v - \text{id}_E)$ .
3. Montrer l’égalité

$$\dim \ker(u - \text{id}_E) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \text{tr}(u^k)$$

4. Exprimer le noyau et l’image de  $v$  en fonction de  $u$ .

*Commentaire du prof : Il y avait tout une première partie qui consistait à faire l’étude sur un cas particulier : un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  dont on donnait la matrice. Mais cette matrice a été perdue...*

**Exercice 20** ★★☆☆ CCP 2023 – Hermine T.

Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  on pose

$$\varphi(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$$

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  on note aussi

$$f_\alpha : P \mapsto P + \alpha\varphi(P)X$$

1. Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ .
2. Dans cette question et dans les deux questions suivantes, on suppose  $n = 3$ . Déterminer la matrice  $A_\alpha$  canoniquement associée à  $f_\alpha$ .
3. Déterminer le spectre de  $f_\alpha$ . Est-ce que  $f_\alpha$  est bijectif?
4. Montrer que  $f_\alpha$  est diagonalisable si et seulement si  $\alpha = 0$ .
5. Déterminer le rang de  $\varphi$ .
6. Montrer que  $\ker(\varphi)^\perp = \mathbb{R}_0[X]$ .

*Commentaire : Pour vous donner une petite idée, l’examineur était un mélange de M. Saulnier et Mme Bilange. À vous de deviner si j’ai passé un bon moment ou les pires 30 min de ma vie.*

**Exercice 21** ★★☆☆ Mines Telecom 2023 – Louis K.

On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable en faisant le moins de calculs possible.
2. Déterminer une base de diagonalisation de  $A$ .

*Commentaire : Il y avait un deuxième exercice d’analyse. Examineur sympathique. Il était particulièrement pointilleux sur les termes que j’employais.*

**Exercice 22** ★★☆☆ CCP 2023 – Penelope H.

1. On pose  $j = \exp(2i\pi/3)$ . Montrer que  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ .
2. Soit  $P(X) = (X + 1)^5 - X^5 - 1$ . Calculer  $P(0), P(-1), P(j)$ . Que vaut  $P(\bar{j})$ ?
3. Factoriser  $P$  en polynômes irréductibles.
4. Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P(A) = \mathbf{0}$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable. Plus précisément, montrer que  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\text{diag}(\mathbf{0}_p, -\mathbf{I}_q, j\mathbf{I}_r, \bar{j}\mathbf{I}_r)$$

avec  $p + q + 2r = n$ .

5. On suppose de plus que  $\text{tr}(A) = 0$ . Montrer que  $A = \mathbf{0}_n$ .
6. De même, factoriser  $Q(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$  en facteurs irréductibles.

7. Soit  $\mathbf{B}$  une matrice telle que  $Q(\mathbf{B}) = 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{B}) = 0$ . Montrer que  $\mathbf{B} = \mathbf{0}_n$ .

**Exercice 23** ★★☆☆ Mines 2023 – Ferdinand C.

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On définit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix}$$

Donner les éléments propres de  $\mathbf{A}$ .

Calculer  $\mathbf{A}^n$  et donner une CNS pour que  $(\mathbf{A}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Commentaire : *Examineur ok mais qui ne parle pas beaucoup.*

**Exercice 24** ★★☆☆ Telecom 2021 – Hadrien B.

On pose  $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Quel est le rang de  $\mathbf{A}_n$  ?
2. En résolvant  $\mathbf{A}_n \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$ , rechercher les éléments propres de  $\mathbf{A}_n$ .
3.  $\mathbf{A}_n$  est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  ? Dans  $\mathbb{C}$  ?

**Exercice 25** ★★☆☆ Centrale 1 2021 – Henri T.

Soient  $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ .

1. Que peut-on dire immédiatement sur  $\mathbf{B}$  ?
2. Soient  $\alpha$  la plus petite valeur propre de  $\mathbf{B}$  et  $\beta$  la plus grande. Montrer que

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) \subset [\alpha/2; \beta/2]$$

**Exercice 26** ★★☆☆ CCP 2021 – Henri T.

Soit  $E$  un ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  et  $x$  un vecteur propre associé. Que vaut  $f^n(x)$  ?
2.  $E$  est de dimension finie impaire et  $f$  vérifie  $f^3 - f^2 + f - \text{id} = 0$ . Trouver le spectre de  $f$ .

**Exercice 27** ★★☆☆ Telecom 2021 – Henri T.

Soit  $E$  un ev de dimension finie  $n$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme ayant  $n$  valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe un vecteur  $a \in E$  tel que la famille suivante soit libre :

$$(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$$

**Exercice 28** ★★☆☆ Mines 2021 – Pierre V.

Soit  $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\mathbf{A}^3 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_n = \mathbf{0}$ .

1. Montrer que toute valeur propre  $\lambda$  vérifie

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$$

2. En déduire  $\det(\mathbf{A}) > 0$ .

**Exercice 29** ★★☆☆ Mines 2021 – Ulysse M.

Soit  $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ . On considère la matrice écrite par blocs  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ .

1. Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $\mathbf{M}$  si et seulement si  $\lambda^2$  est valeur propre de  $\mathbf{A}$ .
2. Établir une CNS pour que  $\mathbf{M}$  soit diagonalisable.

**Exercice 30** ★★☆☆ Mines 2021 – Elise R.

On définit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Trouver sans calcul les valeurs propres, les espaces propres. La matrice est-elle diagonalisable ?

**Exercice 31** ★★☆☆ Mines 2021 – Adam P.

On pose  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1.  $\mathbf{A}$  est-elle diagonalisable ?
2. Calculer  $\mathbf{A}^n$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associée à  $\mathbf{A}$ . Trouver les sev stables par  $f$ .

**Exercice 32** ★★☆☆ CCP 2021 – Eva T.

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ , soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  vaut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 2a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 1 \\ 2a & -2a & a \end{bmatrix}$$

1. Calculer  $\text{rg}(\mathbf{A} + a\mathbf{I}_3)$ . En déduire que  $(e_2 + e_3)$  est une base de  $\ker(\mathbf{A} + a\mathbf{I}_3)$ .
2. Montrer que  $a$  est valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Que vaut  $\dim \ker(\mathbf{A} - a\mathbf{I}_3)$  ? Que vaut  $\text{tr}(\mathbf{A})$  ? En déduire le spectre de  $\mathbf{A}$ .

**Exercice 33** ★★☆☆ X-ESPCI 2021 – Rémy D.

On se donne  $a, b, c \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  trois endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant

$$\begin{cases} ab - ba = c \\ bc - cb = a \\ ca - ac = b \end{cases}$$

1. Montrer que si  $x$  est vecteur propre commun à  $a$  et  $b$ , alors  $x \in \ker a \cap \ker b \cap \ker c$ .
2. On suppose que  $\ker a \cap \ker b \cap \ker c = \{0\}$ . Montrer qu’il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercice 34** ★★ X-ESPCI 2021 – Elouan O.

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $u \circ u = u$ .

1. L’endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
2. Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ , de même rang  $r$  et vérifiant  $u \circ u = u$  et  $v \circ v = v$ . Montrer qu’il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$\begin{cases} u = a \circ b \\ v = b \circ a \end{cases}$$

**Exercice 35** ★★ CCP 2021 – Ethan A.

Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1. Montrer que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{rg}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) \in \{n-1, n\}$ .
2. Montrer que  $\mathbf{A}$  est diagonalisable, puis qu’elle admet  $n$  valeurs propres distinctes.

**Exercice 36** ★★ CCP 2022 – Aurélien T.

On dit qu’une matrice  $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  admet une racine carrée si

$$\exists \mathbf{B} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$$

1. On considère  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ . Calculer  $\det(\mathbf{A})$  et montrer que  $\mathbf{A}$  n’admet pas de racine carrée.
2. a) On pose :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & -1 & a \end{bmatrix}$$

où  $a \in \mathbb{R}$ .

Donner les valeurs propres de  $\mathbf{J}$  et montrer que  $\mathbf{J}$  est diagonalisable.

- b) Montrer que  $\mathbf{M}_a$  s’écrit  $\mathbf{P}\mathbf{D}_a\mathbf{P}^{-1}$  où  $\mathbf{D}_a$  est diagonale. Expliciter la matrice  $\mathbf{D}_a$ .

3. a) Soit  $\mathbf{H}$  une racine carrée de  $\mathbf{M}_a$ . Soit  $f$  (resp.  $h$ ) l’endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $\mathbf{J}$  (resp.  $\mathbf{H}$ ). Montrer que  $\mathbf{H}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{H}$ .  
b) Montrer que les vecteurs propres de  $h$  sont tous vecteurs propres de  $f$ . Montrer qu’il existe une matrice diagonale  $\mathbf{\Delta}_a$  telle que  $\mathbf{P}\mathbf{\Delta}_a\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{H}$ .
4. Donner une CNS sur  $a$  pour que  $\mathbf{\Delta}_a^2 = \mathbf{D}_a$ .

Commentaire : Mouais bof.

**Exercice 37** ★★ CCP 2022

On pose  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ .

Rechercher les matrices  $\mathbf{X}$  telles que  $\mathbf{X}^3 = \mathbf{A}$ .

**Exercice 38** ★★ CCP 2022 – Laurence D.

(exo 1)

Soit  $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $(\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2)$  forme une famille libre.

On pose  $E = \text{Vect}(\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2)$ . Par ailleurs, on suppose qu’il existe  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tels que

$$\mathbf{A}^3 = x\mathbf{I}_n + y\mathbf{A} + z\mathbf{A}^2$$

Enfin, on appelle  $f : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{M}$  (pour  $\mathbf{M} \in E$ ).

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme.
2. Écrire la matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$  représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2)$ . Montrer que  $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq 2$  pour tout scalaire  $\lambda$ .
3. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est sciendé à racines simples.
4. On donne dans cette question

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^3 - z\lambda^2 - y\lambda - x$$

Montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $\mathbf{A}$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ .

5. On suppose dans cette question que

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}(\lambda - \lambda_3)^{n_3}$$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in ]-1; 1[$  et  $n_1, n_2, n_3$  trois entiers naturels tels que  $n_1 + n_2 + n_3 = n$ .

- a) Montrer que  $f^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
- b) Montrer que  $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{0}$ .

Commentaire : (Il y avait un exo 2 avec des normes de polynômes). Comment finir cette année en beauté avec de l’algèbre, des normes et des polynômes ! Je suis contente. L’interrogateur savait me dire les informations précises pour que je débloque rapidement, surtout pour la question 3. Je remercie ma petite

étoile pour m'avoir épargné les probas tout au long des oraux. Plus de maths ! :-)

**Exercice 39** ★★ CCP 2022 – Jean Jacques G.

(exo 2)

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice de coefficients :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{ij} = \frac{i}{j}$$

Quel est le rang de  $A$ ? Que peut-on en déduire des valeurs propres de  $A$ ?

*Commentaire : Examineur un peu intimidant qui parle beaucoup. Très pointilleux. Il faut justifier CHAQUE mot!! et chaque calcul!!*

*Commentaire du prof : Ben oui.*

**Exercice 40** ★★ Telecom 2022 – Laurence D.

On pose  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1. Quel est le rang de  $A$ ?
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  l'endomorphisme canoniquement associé. Déterminer  $\text{Im } u$  et  $\text{ker } u$ .
3. Sans utiliser le polynôme caractéristique, trouver les éléments propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

*Commentaire : avec des questions de cours...*

**Exercice 41** ★★ Telecom 2022 – Aurélien G.

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable. Indice : calculer  $A^2$ .
2. Déterminer  $A^n$  en fonction de  $n$  et  $a$ .

*Commentaire : Examineur qui met en confiance, et qui incite à tricher sur les calculs matriciels.*

**Exercice 42** ★★ Telecom 2022 – Ferdinand C.

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour  $P \in E$ , on pose :

$$\Phi(P) = P - (X + 1) \cdot P'$$

1. Montrer que  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Montrer que  $\Phi$  est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.

*Commentaire : Examinatrice qui n'aime pas les blancs donc te pose beaucoup de questions pour te guider.*

**Exercice 43** ★★ CCP 2022 – Guillaume C.

On munit  $\mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$  de la norme infinie :

$$\|M\|_\infty = \max_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket} |m_{ij}|$$

On pose  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

1.  $A$  est-elle diagonalisable?
2. a) Soit  $N = A - I_3$ . Déterminer  $N^k$  pour tout  $k$ .  
b) Expliciter  $A^n$ .
3. Soit  $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ , avec  $d \geq 2$ .  
a) Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme.  
b) Soient  $M, N \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$ , montrer que

$$\|MN\|_\infty \leq d\|M\|_\infty\|N\|_\infty$$

4. Soit  $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C})$  diagonalisable, qui possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1. Donner

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|M^n\|_\infty$$

*Commentaire : L'examineur était sympa et dynamique.*

**Exercice 44** ★★ Centrale 1 2022 – Laurence D.

On a  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , de coefficients  $a_{ij}$  vérifiant :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{ij} \geq 0$$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de  $A$ .
2. Montrer que toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A$  vérifie  $|\lambda| \leq 1$ .
3. Montrer que si  $|\lambda| = 1$  alors  $\lambda = 1$ .

*Commentaire : La question 3 n'était pas sur la feuille, l'examineur l'a ajouté en direct.*

**Exercice 45** ★★ Mines 2022 – Aurélien T.

(exo 2, non préparé)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie  $n \geq 2$ .

1. Montrer que  $u$  est non diagonalisable si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $u$  s'écrit

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \mathbf{0} & B_3 \end{bmatrix}$$

où  $B_1$  est un bloc  $2 \times 2$  de la forme

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Commentaire : J’ai presque réussi à montrer le sens  $\Leftarrow$  mais pas plus... Il y avait d’autres questions. Examineur très neutre qui m’encourageait à tester mes idées même si elles étaient fausses. Il corrigeait mes (petites) erreurs. A priori je n’ai pas dit de grosses bêtises.

**Exercice 46** ★★☆☆ Centrale 1 2022 – Elias S.

Soit  $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par

$$\Phi(P) = (X + 3)P(X) - XP(X + 1)$$

- Déterminer  $\ker \Phi$ .
- $\Phi$  est-elle surjective ?
- Expliciter le spectre de  $\Phi$ .

**Exercice 47** ★★☆☆ Mines 2022 – Gabrielle V.

Soient  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB + BA = A$ . On suppose  $n$  impair.

- Soient  $C, D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $CD = -DC$ . Montrer que  $C$  et  $D$  ont un vecteur propre commun.
- Montrer que  $A$  et  $B$  ont un vecteur propre commun.

Commentaire : Il y avait d’autres questions (cas  $n$  pair). Examineur qui aidait de manière utile.

**Exercice 48** ★★☆☆ Mines 2018

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

- Minorer le rayon de convergence de  $\sum_{p \geq 0} \text{tr}(A^p)x^p$ .
  - Exprimer sa somme en fonction de  $\chi_A$ .
- INDICATION : Calculer  $\frac{\chi'_A}{\chi_A}$ .

**Exercice 49** ★★☆☆ Mines 2022 – Ethan A.

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , symétrique, avec une valeur propre double.

Montrer que pour tout vecteur  $u \in \mathbb{R}^n$ , la famille

$$(u, Au, A^2u, \dots, A^{n-1}u)$$

est liée.

**Exercice 50** ★★☆☆ Mines 2022 – Cécile F.

(exo 2, sans préparation)

Déterminer les  $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  tels que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Commentaire : C’était tellement catastrophique que je n’ai rien à dire.

**Exercice 51** ★★☆☆ Centrale 1 2022 – Emma F.

On définit :

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On appelle  $A_{n,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont toutes les colonnes sont égales à  $C$ , sauf la  $j$ -ième qui est égale à  $D$ .

- Rang de  $A_{n,j}$  ? En déduire une valeur propre de  $A_{n,j}$ .

- Montrer qu’une matrice a le même spectre que sa transposée.

En déduire que  $\frac{n(n+1)}{2}$  est valeur propre de  $A_{n,j}$ .

- Montrer que  $A_{n,j}$  admet une autre valeur propre non nulle, strictement inférieure à  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Est-ce que  $A_{n,j}$  est diagonalisable ?

**Exercice 52** ★★☆☆ X 2018

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$   $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $\text{rg } u^2 = \text{rg } u \Leftrightarrow E = \ker u \oplus \text{Im } u$ .

**Exercice 53** ★★☆☆ X 2018

Soit  $u$  un endomorphisme tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, u^2(x) = \lambda u(x) + \mu x$$

- Montrer que  $u$  a au plus deux valeurs propres distinctes.

- Montrer qu’il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que

$$u^2(x) = \alpha u + \beta \text{id}$$

**Exercice 54** ★★☆☆ X 2018

Soient  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , montrer que :

$$\lambda_k = \min_{F \text{ sev de dim } k} \left( \max_{x \in F, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \right)$$

**Exercice 55** ★★☆☆ X 2018

Soit  $G \subset \text{GL}_d(\mathbb{C})$  fini, non vide, stable par produit et passage à l’inverse.

- Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On suppose que  $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$  est fini. Montrer que  $z$  est une racine de l’unité.

- Montrer que pour tout  $g \in G$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $g^k = I_d$ .

3. Soit  $g \in G \setminus \{I_d\}$ . Montrer que  $\text{tr}(g) \neq d$ .

**Exercice 56** ★★ X 2017

1. Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .  
Montrer que  $\det \overline{M} = \det M$ .
2. Soient  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .  
Montrer que  $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  impair. Montrer que la matrice  $-I_n$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $A^2 + B^2$ , avec  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 57** ★★ X 2016

Soient  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients non diagonaux de module  $\leq \varepsilon$ .

**Exercice 58** ★★ X 2016

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de  $E$  possède un supplémentaire stable par  $u$ .

**Exercice 59** ★★ Centrale 2 2022 - Gabrielle

Soient  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

On note :

- $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$  les valeurs propres de  $A$ .
- $\lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$  les valeurs propres de  $A + xB$ .
- $P_x$  le polynôme caractéristique de  $A + xB$ .

1. Justifier que  $A, B$  et  $A + xB$  sont diagonalisables.
2. Dans cette question on suppose que

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

On choisit des réels  $\gamma_i$  tels que :

$$\alpha_1 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n-1} < \alpha_n < \gamma_n$$

- a) Montrer que  $P_0(\gamma_{i-1})P_0(\gamma_i) < 0$  pour tout  $i$ .
- b) Montrer qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall x \in [-\varepsilon; \varepsilon], \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket,$$

$$P_x(\gamma_{i-1})P_x(\gamma_i) < 0$$

- c) Montrer que pour  $x \in ]-\varepsilon; \varepsilon[ :$

$$\lambda_1(x) < \dots < \lambda_n(x)$$

3. Écrire une fonction PYTHON `sorted(A,B,x)` qui renvoie la liste des valeurs propres de  $A + xB$ , tirées dans l'ordre croissant.

Commentaire : Il y avait beaucoup d'autres questions. *Exo super long, il faisait une page entière écrit petit. Je n'ai pas fait grand chose en préparation, faire le python m'a pris beaucoup de temps (heureusement il marchait!).*

**Exercice 60** ★★ Centrale 2 2021 - Eva T.

Soient  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices de coefficients  $a_{ij} = i + j$  et  $b_{ij} = i$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable et que  $A = B + B^T$ .
2. Écrire en PYTHON une fonction `matA(n)` pour construire la matrice  $A$ .
3. En PYTHON : calculer  $\text{rg}(A)$  pour  $n \in \llbracket 2; 10 \rrbracket$  et émettre une conjecture.
4. Démontrer cette conjecture.
5. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes. Montrer que  $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .
6. À l'aide de la question précédente, redémontrer la conjecture.
7. Quel est le noyau de  $A$ ?
8. Montrer que  $A$  possède deux valeurs propres non nulles  $\lambda$  et  $\mu$ .
9. Calculer numériquement en PYTHON les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$ .

**Exercice 61** ★★ Centrale 2 2021 - Léna S.

On se donne deux matrices  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et on définit l'application  $f_{A,B} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$f_{A,B}(M) = AM - MB$$

1. Montrer que  $f_{A,B}$  est un endomorphisme.
2. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 - 2i & 2 - 2i \\ 6 + 3i & -14 - 6i & -12 - 6i \\ -6 - 3i & 15 + 6i & 13 + 6i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 + 2i & -1 - i & 1 + 2i \\ -1 & 1 + i & -1 \\ -1 - i & 1 + i & -1 - i \end{bmatrix}$$

En utilisant PYTHON, donner la matrice représentative de  $f_{A,B}$  dans la base des matrices élémentaires  $E_{ij}$ . Trouver les spectres complexes de  $A$  et  $B$ , que peut-on remarquer? Peut-on trouver une matrice  $M$  non nulle telle que  $AM = MB$ ? Si oui, l'expliciter.

3. On pose maintenant :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 + i & 1 + i \\ -2 & -2 - i & -2 - i \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

En utilisant PYTHON, donner la matrice représentative de  $f_{A,C}$  dans la base des matrices élémentaires  $E_{ij}$ . Trouver le spectre complexe de  $C$ . Peut-on trouver une matrice  $M$  non nulle telle que  $AM = MC$ ? Si oui, l’expliciter.

- Énoncer une conjecture reliant  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$  et l’existence de  $M \neq 0$  telle que  $AM = MB$ .
- Montrer que si  $\alpha \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$  alors il existe une matrice colonne  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $B^T X = \alpha X$ . En déduire l’existence de  $M \neq 0$  telle que  $AM = MB$ .

**Exercice 62** ★★  
★☆☆  Centrale 2 2021 – Marion L.

On se donne une matrice carrée  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On dit que  $A$  est à diagonale propre si

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

- Justifier qu’une matrice triangulaire est une matrice à diagonale propre.
- Une matrice à diagonale propre est-elle trigonalisable? Diagonalisable?
- On appelle  $\mathcal{E}_n$  l’ensemble des matrices à diagonales propres à  $n$  lignes et  $n$  colonnes. Déterminer  $\mathcal{E}_2$ .
- Écrire en PYTHON une fonction MDP(A) qui prend la matrice  $A$  et renvoie True si  $A$  est à diagonale propre et False sinon.
- Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Montrer que  $A$  admet  $n$  valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité), notées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Exprimer  $\text{tr}(A^T \cdot A)$  en fonction des coefficients  $a_{ij}$  et en fonction des  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

— Algèbre bilinéaire —

**Exercice 63** ★★  
★☆☆ Ens 2025 – Raphaël

Soient  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques telles que

$$\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$$

Montrer que l’endomorphisme de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  qui à  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  associe  $AM - MB$  est un automorphisme.

**Exercice 64** ★★  
★☆☆  Centrale 2025 – Charles

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . On note :

$$C_m(A) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k (A^T)^k A^{m-k}$$

On dit que  $A$  est  $m$ -symétrique si  $C_m(A) = 0$ .

- Quelles sont les matrices 1-symétriques?
- Quelles sont les valeurs propres d’une matrice nilpotente? Quelles sont les matrices 1-symétriques et nilpotentes?
- Soit  $A$  une matrice d’indice de nilpotence  $r$ . Montrer que  $r \leq n$ . Montrer que si  $A$  est nilpotente, alors  $A$  est  $2n$ -symétrique.
- Écrire une fonction PYTHON qui renvoie l’indice de nilpotence de  $A$ . On donne une fonction Test(A) qui renvoie True si  $A = 0_n$ .
- Écrire une fonction psim(A) qui renvoie le couple  $(r, p_A)$  avec  $r$  l’indice de nilpotence et  $p_A$  le premier indice tel que  $A$  est  $p_A$ -symétrique. Comparer  $r$  et  $p_A + 1$ .
- Montrer que si  $A$  est  $m$ -symétrique, alors  $A$  est  $(m + 1)$ -symétrique.

**Exercice 65** ★★  
★☆☆  Mines 2025 – Ambre

Soit  $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Rappeler la définition d’une matrice orthogonale.
- On considère l’application  $E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$$

Montrer que c’est un produit scalaire sur  $E$ .

- Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Sp}(A) \subset ]-1; 1[$ . Déterminer :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (I_n - A) \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$


En déduire le comportement de la suite

$$\left( \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$$

- Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\mathbb{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n)$$

*Commentaire : Encore 2 autres questions sur la suite  $\left( \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$  non traitées. L’examinateur était assez froid et ne parlait pas beaucoup. J’ai plutôt bien réussi le premier exo mais j’ai galéré sur l’intégrale (exo 2)...*

**Exercice 66** ★★  
★☆☆  Mines 2023 – Quentin B.

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  (muni de son produit scalaire usuel) vérifiant la relation :

$$\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle < 0$$

1. Montrer que si on enlève un vecteur à la famille  $(u_1, \dots, u_p)$ , on obtient une famille libre.
2. Pour  $p = n + 2$ , existe-t-il une famille vérifiant cette propriété ?
3. Démontrer qu'il existe une famille vérifiant cette propriété pour  $p = n + 1$ .

Commentaire : Deux indications : pour la question 1, séparer les indices  $i$  selon si  $\lambda_i > 0$  ou  $\lambda_i < 0$ . Pour la question 3, construire la famille à partir d'une BON de  $\mathbb{R}^n$ , dans une sorte d'inverse de Gram-Schmidt. L'oral s'est bien déroulé. L'examinatrice a du me donner la première indication, mais j'ai trouvé la seconde tout seul. Je n'ai pas fini l'exo 1. (Il y avait aussi un deuxième exo d'analyse.)

**Exercice 67** ★★ Telecom 2023 – Yasmine A.

Soit  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et

$$\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
2. Soit  $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ . Montrer que  $F$  est un sev de  $E$ .
3. Déterminer une BON de  $F^\perp$ .
4. Calculer le projeté orthogonal de  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  sur le sev  $F^\perp$ .

Commentaire : C'était le deuxième exercice de l'oral, après un exo d'analyse.

**Exercice 68** ★★ ENS 2023 – Eliane H.

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ .

Montrer que  $\ker A = (\text{Im } A^T)^\perp$ .

Commentaire : C'était le deuxième exo sur trois. Le premier exo était un exercice d'analyse et le troisième c'était des probas toutes nulles. Je suis passée juste après Kenan. L'examinateur était très sympa mais ne parlait pas beaucoup, au final je ne sais pas quoi en penser :/

**Exercice 69** ★★ Mines 2023 – Kenan S.

Montrer que pour toute matrice réelle  $A$  de trace nulle il existe un vecteur réel  $X$  tel que  $X^T A X = 0$ .  
Commentaire : Il y avait un exercice d'analyse avant cet exercice d'algèbre. Plutôt simple. Examinatrice mutique, ne parlant que pour me donner mes exos. Comme j'ai été rapide j'ai subi des probas en plus. J'ai eu 15.

**Exercice 70** ★★ Centrale 1 2023 – Kenan S.

On a  $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$  et on définit

$$\Phi : f \mapsto \left( x \mapsto \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt \right)$$

1. Prouver que  $\Phi$  est bien définie.  
Montrer que  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $\Phi$ .
3. On définit un produit scalaire par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$$

Trouver l'endomorphisme adjoint de  $\Phi$ .

Commentaire : Exercice très simple que l'examinateur a fait durer en étant EXTRÊMEMENT procédurier. Je plie la question 1 à l'oral rapidement, il me reprend de suite. Je lui fais le détail, il dit soyez plus rigoureux dans la suite. La question 2 mène à une équa diff (évidente). Je la résous. Il me dit « il n'y a pas une méthode plus balisée ? ». On s'est arrêté là mais son seul but a été de me freiner quand j'avais la bonne réponse mais que je n'avais pas cité CHAQUE THÉORÈME INDIVIDUELLEMENT. Je lui ai parlé du théorème fondamental de l'analyse, il n'y a pas à remonter jusque là pour un exo comme ça. Son but était de punir l'intuition mathématique ? J'ai eu 4. Je pense que nous avons un désaccord de fond sur comment on est sensé faire des maths.

**Exercice 71** ★★ CCP 2023 – Damien F.

Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Montrer que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $M^T$ .
2. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres distinctes de  $M$  et  $E_\lambda$  et  $E_\mu$  les espaces propres associés. On suppose  $M$  symétrique.  
Montrer que  $E_\lambda \perp E_\mu$ .

Commentaire du prof : C'est quasiment du cours !

**Exercice 72** ★★ ENS 2023 – Thomas D.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui vérifie pour tous vecteurs  $x, y$  :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Montrer que  $f$  est un endomorphisme orthogonal.  
Commentaire : C'était l'exo 2. J'ai appris beaucoup de choses...

**Exercice 73** ★★ CCP 2023

On définit la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que  $M$  est la matrice d'un projecteur orthogonal.

**Exercice 74** ★★☆☆ Mines 2023 – Penelope H.

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^T A$  et  $AA^T$  sont semblables.

Que peut-on dire dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  ?

*Commentaire : C’était l’exercice 2. Je ne suis pas allée au bout mais j’avais des pistes, notamment des cas remarquables comme  $A$  inversible ou  $A$  diagonalisable. Questions bonus posées au milieu de l’exercice : est-ce que l’intersection de deux sev est un sev ? Et l’union ? Est-ce que pour  $a \in \mathbb{C}$  il existe toujours un  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 = a$  ? Globalement, oral raté et examinateur peu utile à part pour dire « non », sinon il était sur son téléphone ou à la fenêtre...*

**Exercice 75** ★☆☆☆ CCP 2023 – Yann B.

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , de coefficients notés  $a_{ij}$ .

1. Que dire de  $\text{Sp}(A)$  ?
2. Montrer qu’on a pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\min \text{Sp}(A) \leq a_{ii} \leq \max \text{Sp}(A)$$

**Exercice 76** ★☆☆☆ CCP 2021 – Elouan O.

Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $a \in E$  tel que  $\|a\| = 1$ . On définit l’endomorphisme  $s_a : x \mapsto x - 2(x, a)a$ .

1. Donner  $\ker(s_a - \text{id})$ . Montrer que  $\ker(s_a + \text{id}) = \text{Vect}(a)$ . En déduire que  $s_a$  est diagonalisable.
2. Soit  $g \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $g \circ s_a = s_a \circ g$ .

**Exercice 77** ★★☆☆ Mines 2021 – Rémy D.

Pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on pose  $\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

1. Montrer que  $\Phi(P, Q)$  est bien défini.
2. Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

4. On pose  $Q_k = \sqrt{\frac{2}{n}} P_k$ . Montrer que la famille  $(Q_0, \dots, Q_n)$  est exactement la famille obtenue en appliquant le procédé d’orthonormalisation de Gram-Schmidt à  $(1, X, \dots, X^n)$ .
5. Montrer que les  $P_k$  sont scindés à racines simples.

**Exercice 78** ★★☆☆ Telecom 2021 – Gabrielle V.

Soient  $A, B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$  deux colonnes non colinéaires. On pose  $M = AB^T + BA^T$ .

1. Montrer que  $M$  est diagonalisable.

2. Calculer le rang de  $M$ . On pourra expliciter sa première colonne.
3. Expliciter le spectre et les espaces propres de  $M$ .

**Exercice 79** ★★☆☆ X 2021 – Adam P.

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$  qui vérifie

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$$

Montrer que  $\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$ .

**Exercice 80** ★★☆☆ Centrale 1 2021 – Adam P.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux, et  $f = p \circ q$  et  $g = p \circ q \circ p$ .

1. Montrer successivement :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset [-1; 1] \text{ puis } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset [0; 1]$$

2. Montrer que  $g$  est diagonalisable.
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

Comparer  $\ker(f - \lambda \text{id})$  et  $\ker(g - \lambda \text{id})$ .

**Exercice 81** ★★☆☆ ENS 2021 – Adam P.

1. Soit  $M \in S_2(\mathbb{R})$ . Trouver une CNS sur les coefficients de  $M$  pour que ses valeurs propres soient positives.
2. Soient  $T, S \in S_n^+(\mathbb{R})$ . On dit que  $T \geq S$  si et seulement si  $T - S \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Est ce que  $T \geq S \Rightarrow T^2 \geq S^2$  ?

**Exercice 82** ★★☆☆ Mines 2021 – Ivain G.

Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est symétrique positive si :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0$$

1. Montrer que  $A$  est symétrique positive si et seulement si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ .
2. Soient  $A, B$  symétriques positives. On définit  $C = (a_{ij}b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $C$  est symétrique positive.

**Exercice 83** ★★☆☆ Mines 2021 – Zaccarie K.

Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$  une matrice semblable à son inverse. Montrer que  $\text{tr}(M^2) \geq n$ .

**Exercice 84** ★★☆☆ Mines 2021 – Florian D.

Soit  $E$  un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes  $f$  vérifiant : Pour tout sev  $V$  de  $E$ ,  $f(V^\perp) = f(V)^\perp$ .

**Exercice 85** ★☆☆☆ CCP 2021 – Gabrielle V.

Soit  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. On suppose  $M$  symétrique et  $M^n = \mathbf{0}$ , montrer que  $M = \mathbf{0}$ .
2. On suppose  $M$  symétrique et  $M^n = I_n$ , montrer que  $M^2 = I_n$ .
3. On suppose  $M^n = \mathbf{0}$  et  $M \cdot M^T = M^T \cdot M$ . À l'aide de la matrice  $A = M \cdot M^T$ , montrer que  $M = \mathbf{0}$ .

**Exercice 86** ☆☆ CCP 2022 – Cécile F.

(exo 2, sans préparation)  
Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ . On se donne trois réels  $a, b, c$  deux à deux distincts et on définit :

$$\langle P, Q \rangle = P(a)P(b) + P(b)Q(b) + P(c)Q(c)$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
2. On pose

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(a) + P(b) + P(c) = 0\}$$

Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
Expliciter  $F^\perp$  et calculer  $d(X^2, F)$ .

*Commentaire : Examineur vraiment adorable. J'ai fait de petites bêtises mais il a réagi de façon à me mettre à l'aise. Comme on arrivait à la fin de l'exo 2 et qu'il restait un peu de temps, il m'a expliqué deux-trois trucs sur les hyperplans (même si j'ai pas trop compris parce que c'est vraiment ma phobie ce truc là).*

**Exercice 87** ☆☆ CCP 2022 – Ferdinand C.

Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha)Q^{(k)}(\alpha)$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $f : P \in E \mapsto P + (X - 1)P'$ .

Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , puis qu'il est symétrique.

*Commentaire : Examineur sympathique qui laisse parler et accepte les justifications à l'oral.*

**Exercice 88** ☆☆ Telecom 2022 – Pierre R.

(exo 2)  
Soit  $a$  un vecteur unitaire d'un espace euclidien  $E$ , et  $\xi$  un réel différent de 1. On définit :

$$\forall x \in E, f(x) = x + \xi \langle x, a \rangle a$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme symétrique.

2. Montrer que  $f$  est un automorphisme.
3. Déterminer les valeurs propres de  $f$ .

*Commentaire : Examinatrice désagréable qui n'a ouvert la bouche que pour me descendre et pas pour m'aider. Bilan : oral raté mais je ne perds pas espoir !*

**Exercice 89** ☆☆ Telecom 2022 – Uther C.

(exo 1)  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer toutes les  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$M \cdot M^T \cdot M = I_n$$

*Commentaire : (Il y avait une deuxième question d'application, oubliée.) Un examineur jeune, vite de jeune entrepreneur dynamique. Super cool. Comme j'avais bien commencé l'exo 1, il m'a encouragé. Super !*

**Exercice 90** ☆☆ Mines 2018

Soit  $E = \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ . On pose pour  $(f, g) \in E^2$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 [fg + f'g']$ . On définit :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

$$\text{et } G = \{f \in E \mid f'' = f\}$$

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
2. Donner une b.o.n. de  $G$ .
3. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux.
4. Donner l'expression de la projection orthogonale sur  $G$ .

**Exercice 91** ☆☆ Mines 2018

Soit  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  les sev des matrices antisymétriques et symétriques. On pose  $(A \mid B) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$  et on admet que c'est un produit scalaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
2. On se donne une matrice  $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ . Déterminer  $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ .

**Exercice 92** ☆☆ Centrale 1 2022 – Ethan A.

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On le munit du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos \theta)Q(\cos \theta) d\theta$$

On considère la famille  $(T_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  des polynômes de Tchebychev de première espèce.

Rappels :  $T_k$  est l’unique polynôme qui vérifie

$$T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$$

Le degré de  $T_k$  est  $k$  et son coefficient dominant est  $\max\{1, 2^k\}$ .

1. Montrer que  $(T_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  est une base orthogonale.

Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , calculer la norme de  $T_k$ .

2. Montrer que  $T_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ .

3. Soit  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . Calculer :

$$\int_0^\pi \cos^k(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

*Commentaire : Bon oral, examinateur rigoureux. Question 3 pas évidente et un peu « trompe l’œil », ne surtout pas partir en bourrinage.*

**Exercice 93** ★★ X 2019

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^2$  avec  $1 \leq p \leq n$ , et  $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  telle que  $\text{rg}(M) = p$ .

1. Soit  $y \in \mathbb{R}^n$ . Montrer qu’il existe un unique  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$\|Mx - y\| = \inf_{x' \in \mathbb{R}^p} \|Mx' - y\|$$

2. Montrer que  $M^T M$  est inversible.

3. Donner une relation entre  $\text{Im } M$  et  $\text{ker } M^T$ .

4. En déduire une expression de  $x'$ .

**Exercice 94** ★★ Mines 2018

On suppose  $n \geq 2$ .

1. Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique. Montrer que ses valeurs propres sont imaginaires pures.

2. Soit  $R = (I + A)(I - A)^{-1}$ .  
Montrer que  $R \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ .

3. Pour  $Q \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ , résoudre

$$\begin{cases} (I + A)(I - A)^{-1} = Q \\ A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

INDICATION : utiliser  $t = \tan(\theta/2)$ .

4. L’application suivante est-elle bijective ?

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{SO}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & (I + A)(I - A)^{-1} \end{cases}$$

**Exercice 95** ★★ ENS 2016

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. On se donne  $a$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $b$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Décrire géométriquement

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a\|x\|^2 + \langle b, x \rangle + c = 0\}$$

**Exercice 96** ★★ ENS 2014

On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer les  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continues, impaires et telles que, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ,  $a \perp b$  implique  $\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b)$ .

**Exercice 97** ★★ X 2015

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  nilpotente. Déterminer

$$\{\langle Ax, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n\}$$

**Exercice 98** ★★ Centrale 1 2022 – Mathilde D.

Soit  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de  $B$  une matrice symétrique réelle positive. On pose  $A = Q^T Q$  et on se donne deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ .

1. Montrer qu’il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale à coefficients positifs tels que

$$B = P^T D P \text{ et } A = P^T P$$

2. Montrer que  $\det(\alpha A + \beta B) \geq \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$ .  
Indication :  $\ln(\alpha + \lambda\beta) \geq \beta \ln(\alpha)$ .

**Exercice 99** ★★ Centrale 2 2018

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{E}_n = \binom{2n}{n}$  et

$$H_n = (\mathcal{E}_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que  $H_n$  est diagonalisable.

2. Montrer dans les cas  $n = 1$  et  $n = 2$  que  $\det H_n = 2^n$  et que les valeurs propres sont strictement positives.

3. a) Créer une fonction permettant de retourner la matrice  $H_n$ . SUGGESTION : utiliser `scipy.special.comb`.

b) Sur quelques cas particuliers, vérifier que  $\det H_n = 2^n$  et que les valeurs propres sont strictement positives à l’aide de Python.

4. Montrer l’équivalence entre (i) et (ii) :

(i) :  $A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  est symétrique de valeurs propres  $> 0$ .

(ii) :  $A = T^T T$  avec  $T \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ .

5. On pose  $P_q(X) = (1 + X)^{2q}$ . Exprimer le coefficient en  $X^{i+j}$  du produit  $P_i(X)P_j(X)$  en fonction de  $\mathcal{E}_{i+j}$

6. Démontrer le résultat général attendu.

**Exercice 100** ★★ X 2015

Soient  $u, v \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  deux endomorphismes orthogonaux tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|u(x) - x\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \text{ et } \|v(x) - x\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$$

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|u^{-1} \circ v^{-1} \circ u \circ v(x) - x\| \leq \|x\|$ .

**Exercice 101** ★★ X 2013

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  ayant une valeur propre multiple. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , montrer que  $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$  est liée.

**Exercice 102** ★★ X 2014

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $a, a', b, b'$  des réels avec  $a \leq a'$  et  $b \leq b'$ . On suppose  $\text{Sp}(A) \subset [a; a']$  et  $\text{Sp}(B) \subset [b; b']$ . Montrer que

$$\text{Sp}(A + B) \subset [a + b; a' + b']$$

**Exercice 103** ★★ X 2021 - Cyprien F.

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont les coefficients diagonaux valent  $b$ , et les autres coefficients valent  $a$ . Donner une CNS sur  $(a, b)$  pour que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p$  existe.

**Exercice 104** ★★ CCP 2011

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| e^t dt$$

Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ . Est-elle équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$  ?

**Exercice 105** ★★ CCP 2021 - Ferdinand J.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\|A\| = \max_{i \in [1; n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  et

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

1. Donner  $\rho(A)$  et  $\|A\|$  pour  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$ .

2. Montrer que pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

3. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  un vecteur propre associé.

a) Montrer que  $|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j|$ .

b) Montrer que  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

4. Soit  $A$  diagonalisable.

Montrer que  $A^k$  tend vers la matrice nulle si et seulement si  $\rho(A) < 1$ .

**Exercice 106** ★★ Centrale 1 2022 - Ferdinand J.

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

On dit que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est une similitude si

$$\exists \lambda \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

1. Soit  $f$  une similitude.

Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{O}(E)$  et  $k \in \mathbb{R}$  tels que  $f = kg$ .

2. Montrer que  $f$  est une similitude si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

*Commentaire : Il y avait une autre question (avec un exemple de matrice de similitude mais je ne me souviens plus des coefficients). Examineur sympa.*

**Exercice 107** ★★ Mines 2021 - Cyprien F.

On note  $\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{P}$  est fermé.

2. Est ce que  $\mathcal{P}$  est ouvert ?

3.  $\mathcal{P}$  est-il borné ?

**Exercice 108** ★★ Centrale 1 2022 - Hadrien B.

Soit  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ , que l'on munit du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Pour tout  $f \in E$  on pose

$$v(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que  $v : E \rightarrow E$  est bien définie, que  $v \in \mathcal{L}(E)$  et qu'il existe un endomorphisme  $v^*$  tel que :

$$\langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$

pour tous  $f, g \in E$ .

L'application  $v^*$  est-elle unique ?

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $v \circ v^*$ .

Commentaire : Examineur cool.

**Exercice 109** ★★☆☆ Mines 2018

On pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont des normes.
2. Montrer que la suite définie par pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = \frac{1}{n!} X^n$  converge pour une seule des deux normes.

**Exercice 110** ★★☆☆ Mines 2022 – Maya E.

Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est exactement l’ensemble des  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} AA^T = A^T A \\ (A^k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est bornée.} \end{cases}$$

**Exercice 111** ★★☆☆ Mines 2022 – Kahina B.

(exo 2)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n$ .

1. Montrer que pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , il existe un unique produit scalaire pour lequel  $\mathcal{B}$  est orthonormale.
2. Caractériser les endomorphismes  $u \in \mathcal{L}(E)$  pour lesquels il existe un produit scalaire tel que  $u$  est symétrique.

Commentaire : Examineur horrible, il soufflait tout le temps, lachait des « p\*tain » en regardant mon tableau, s’énervait souvent. Une perte totale de confiance en soi et un oral catastrophique...

**Exercice 112** ★★☆☆ X 2018

Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$  ne possédant pas 1 comme valeur propre. Étudier la convergence de la suite de terme général  $U_k = \frac{1}{k} (I_n + A + \dots + A^{k-1})$ .

**Exercice 113** ★★☆☆ ENS 2018

On munit  $E = \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq d} |a_{i,j}|$ .

1. Soit  $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ . Montrer que la série  $\sum \frac{A^n}{n!}$  converge.

On note  $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ .

2. Calculer  $\exp(A)$  pour

$$A \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. On fixe  $A$  et  $B$  et on note :

$$T_n = \exp\left(\frac{1}{n}A\right) \exp\left(\frac{1}{n}B\right)$$

$$S_n = \exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right)$$

Montrer que  $\|S_n - T_n\|_\infty = O_{n \rightarrow +\infty}(1/n^2)$ .

4. Déterminer la limite de  $(T_n^n)$ .

**Exercice 114** ★★☆☆ X 2018

Soient  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $K \subset \mathbb{C}$  un compact non vide. Montrer que  $\sup\{|P(z)|, z \in K\}$  est atteint sur la frontière de  $K$ .

**Exercice 115** ★★☆☆ X 2017

Soient  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{E} = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ . Montrer que  $\mathcal{E}$  est borné si et seulement si  $M$  est une homothétie.

— Géométrie dans le plan —

**Exercice 116** ★★☆☆ Mines 2015

Soient  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  et  $\mathcal{C}'$  le cercle de centre  $O'$  et de rayon  $R'$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l’intersection de ces deux cercles soit non vide.

**Exercice 117** ★★☆☆ X 2018

Montrer que la somme des distances au carré d’un point aux sommets d’un polygone régulier de côtés  $n \geq 3$  ne dépend que de la distance au centre du polygone.

**Exercice 118** ★★☆☆ X 2018

Soient  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $(0,0)$  et de rayon 1,  $A_0(-1,0)$  et  $A \in \mathcal{C} \setminus \{A_0\}$ . On note  $M$  le point d’intersection de la tangente au cercle en  $(1,0)$  et de  $(A_0A)$ . Montrer que  $M$  est à coordonnées rationnelles si et seulement si  $A$  est à coordonnées rationnelles.