

15. Oraux – Thèmes d'analyse

- ☆☆☆☆ Exercice d'application simple
- ★☆☆☆ Petit échauffement tranquille
- ★★☆☆ Encore très abordable
- ★★★☆☆ Mérite réflexion
- ★★★★ Exercice bien énervé

- ♥ Basique à maîtriser quasi par cœur
- 💡 Exercice standard / super classique
- 🖋️ Solution longue, il faut s'accrocher
- 💻 Contient du PYTHON

— Espaces vectoriels normés —

Exercice 1 ☆☆ 🖋️ Centrale 2 2024 – Pierre Z.

On définit les ensembles

$$\mathcal{U}_n = \mathfrak{M}_n(\{0, 1\}) \text{ et } \mathcal{V}_n = \mathfrak{M}([0; 1])$$

1. Montrer que \mathcal{V}_n est borné et convexe. Dans la suite, on admet que \mathcal{V}_n est aussi fermé.
2. Soit $M \in \mathcal{V}_n$. Soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé.

On pourra noter

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

et on pourra appeler i_0 l'indice tel que

$$x_{i_0} = \max_{i \in [1; n]} x_i$$

Démontrer que $|\lambda| < n$.

3. Montrer que $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum u_n sur \mathcal{U}_n et un maximum v_n sur \mathcal{V}_n .
4. Coder en PYTHON des fonctions $n \mapsto U(n)$ et $n \mapsto V(n)$.

La fonction U effectuera mille tirages de matrices $M \in \mathcal{U}_n$ et renverra le déterminant maximal parmi ces mille matrices, et la fonction V fera de même avec l'ensemble \mathcal{V}_n .

On indique que `rd.randint(0, 2, (n, n))` donne une matrices aléatoire à coefficients dans $\{0, 1\}$, et `rd.random((n, n))` fait de même pour $[0; 1]$.

5. Tester le programme pour $n \in [2; 10]$. Établir une conjecture reliant u_n et v_n .

Commentaire : Il y avait d'autres questions, je ne sais plus trop mais il fallait sans doute démontrer ou informer la conjecture.

Exercice 2 ☆☆ ☆☆ X 2021 – Cyprien F.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent b , et les autres coefficients valent a . Donner une CNS sur (a, b) pour que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A^p$ existe.

Exercice 3 ☆☆ ☆☆ CCP 2011

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| e^t dt$$

Montrer que N est une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 4 ☆☆ ☆☆ CCP 2021 – Ferdinand J.

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\|A\| = \max_{i \in [1; n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

1. Donner $\rho(A)$ et $\|A\|$ pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$.
2. Montrer que pour $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vecteur propre associé.

a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j|$.

b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$.

4. Soit A diagonalisable.

Montrer que A^k tend vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 5 ☆☆ ☆☆ Centrale 1 2022 – Ferdinand J.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si

$$\exists \lambda \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

1. Soit f une similitude.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $f = kg$.

2. Montrer que f est une similitude si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

Commentaire : Il y avait une autre question (avec un exemple de matrice de similitude mais je ne me souviens plus des coefficients). Examineur sympa.

Exercice 6 ★★★
★☆☆ Mines 2021 – Cyprien F.

On note $\mathcal{P} = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$.

1. Montrer que \mathcal{P} est fermé.
2. Est ce que \mathcal{P} est ouvert ?
3. \mathcal{P} est-il borné ?

Exercice 7 ★★★
★☆☆ Centrale 1 2022 – Hadrien B.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, que l'on munit du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Pour tout $f \in E$ on pose

$$v(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. Montrer que $v : E \rightarrow E$ est bien définie, que $v \in \mathcal{L}(E)$ et qu'il existe un endomorphisme v^* tel que :

$$\langle v(f), g \rangle = \langle f, v^*(g) \rangle$$

pour tous $f, g \in E$.

L'application v^* est-elle unique ?

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $v \circ v^*$.

Commentaire : Examineur cool.

Exercice 8 ★★★
★☆☆ Mines 2018

On pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

2. Montrer que la suite définie par pour $n \geq 1$, $P_n = \frac{1}{n!} X^n$ converge pour une seule des deux normes.

Exercice 9 ★★★
★☆☆ Mines 2022 – Maya E.

Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des $A \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} AA^T = A^T A \\ (A^k)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est bornée.} \end{cases}$$

Exercice 10 ★★★
★☆☆ Mines 2022 – Kahina B.

(exo 2)

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension n .

1. Montrer que pour toute base \mathcal{B} de E , il existe un unique produit scalaire pour lequel \mathcal{B} est orthonormale.
2. Caractériser les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels il existe un produit scalaire tel que u est symétrique.

*Commentaire : Examineur horrible, il soufflait tout le temps, lachait des « p*tain » en regardant mon tableau, s'énervait souvent. Une perte totale de confiance en soi et un oral catastrophique...*

Exercice 11 ★★★
★★★ X 2018

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ ne possédant pas 1 comme valeur propre. Étudier la convergence de la suite de terme général $U_k = \frac{1}{k} (I_n + A + \dots + A^{k-1})$.

Exercice 12 ★★★
★★★ ENS 2018

On munit $E = \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq d} |a_{i,j}|$.

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge.

On note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

2. Calculer $\exp(A)$ pour

$$A \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

3. On fixe A et B et on note :

$$T_n = \exp\left(\frac{1}{n}A\right) \exp\left(\frac{1}{n}B\right)$$

$$S_n = \exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right)$$

Montrer que $\|S_n - T_n\|_\infty = O_{n \rightarrow +\infty}(1/n^2)$.

4. Déterminer la limite de (T_n^n) .

Exercice 13 ★★ X 2018

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide. Montrer que $\sup\{|P(z)|, z \in K\}$ est atteint sur la frontière de K .

Exercice 14 ★★ X 2017

Soient $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{E} = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$. Montrer que \mathcal{E} est borné si et seulement si M est une homothétie.

— Intégrales généralisées —

Exercice 15 ★★ Telecom 2021 – Khaled S.

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + x^n} dx$.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^n \frac{1}{e^x + x^n} dx$.

Exercice 16 ★★ CCP 2021 – Rémy D.

On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+t} dt$.

Ensemble de définition de F ? F est-elle dérivable et que vaut F' ? F est-elle \mathcal{C}^1 ? F est-elle intégrable?

Exercice 17 ★★ Mines 2021 – Pierre V.

Existence et calcul de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$.

Exercice 18 ★★ Centrale 1 2021 – Zeyuan H.

On pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} dt$.

- Montrer que l'intégrale existe.
- Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
- En déduire I_n en fonction de α , n et $I_1(\alpha)$.
- Déterminer la limite de $I_n(\alpha)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- Montrer que $I_n \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$ avec $K(\alpha)$ une constante.

Exercice 19 ★★ Centrale 2022 – Cécile F.

1. Démontrer

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{n^n \sqrt{n}}{n!} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{\sqrt{n}t} dt$$

2. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

Commentaire : J'ai super bien commencé en faisant la 1 en à peine plus de cinq minutes, mais pour la deuxième j'ai bugué.

Exercice 20 ★★ Telecom 2022 – Uther C.

(exo 2)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 (f(t))^{2n} dt$$

On suppose que I_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

- Montrer que $|f(t)| \leq 1$ pour tout t .
- Montrer que les valeurs prises par f sont toutes dans $\{-1, 0, 1\}$.
- Que dire de f ?

Exercice 21 ★★ X 2018

Déterminer un équivalent de $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 22 ★★ CCP 2022 – Ferdinand J.

1. Que vaut $[x]$ pour $k \in [k; k+1]$? En déduire

$$\int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$$

2. Justifier que

$$\int_1^n \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$$

- Montrer que $\ln(n!) = n \ln(n) - 1 + o(1)$.
- Quelle est la limite quand l'entier n tend vers $+\infty$ de

$$\int_1^n \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx ?$$

5. En déduire

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$$

Commentaire : Si c'était un oral des Mines il n'y aurait que la question 5!

Exercice 23 ★★ X 2009

Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$.

Exercice 24 ★★ X 2014

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$0 < a < b$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$.

Exercice 25 ★★☆☆ Centrales 2 2022 – Ethan A.

On pose

$$J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \ln t \, dt$$

1. Montrer que J_k est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Lorsque $a < 0$, que dire de la convergence de

$$\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} \ln t \, dt ?$$

3. Montrer que

$$J_k = \frac{1}{k+1} J_{k+1} + \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \, dt$$

4. Programmer en PYTHON une fonction $J(k)$ qui renvoie J_k étant donné k .

Calculer une valeur approchée de J_k pour $k \in [0; 5]$.

5. Représenter graphiquement $\sum_{k=1}^n \frac{J_k}{k! \ln k}$ en fonction de n .

Quelle hypothèse peut-on formuler ?

6. Quelle est la valeur de

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \, dt ?$$

7. a) Montrer que $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sim n \ln n$.

b) Développement asymptotique de H_n .

8. Confirmer l'hypothèse de la question 5.

Commentaire : Il reste deux autres questions. Examineur désagréable, aucune aide (surtout en Python), heureusement que j'avais tout seul... La fille avant moi hurlait durant son oral... très désagréable aussi. Sinon exercice facile en maths mais le python était lourd...

Exercice 26 ★★☆☆ X 2015

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} (f'(t)^2 + t^2 f(t)^2) \, dt$$

Montrer que f^2 est intégrable sur \mathbb{R}_+ et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, dt \leq$$

$$2 \sqrt{\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 \, dt}$$

Exercice 27 ★★☆☆ X 2015

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Montrer l'existence d'une suite de réels positifs $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que $x_n \rightarrow +\infty$ et $x_n f(x_n) \rightarrow 0$.

— Intégrales à paramètre —

Exercice 28 ★★☆☆ Telecom 2021 – Gabrielle V.

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} \, dt$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Continuité et dérivabilité de f ?
3. Montrer que $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.
4. Calculer des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.
5. Calculer $f(1)$.

Exercice 29 ★★☆☆ Centrale 1 2021 – Thibault D.

On se donne deux intervalles

$$K = [a; b] \subset \mathbb{R} \text{ et } J = [\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$$

On se donne une fonction $f : K \times J \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que f est M -lipschitzienne et $\partial f / \partial x$ est lipschitzienne.

1. Montrer que $\psi : K \times J \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\psi(x, z) = \int_a^z f(x, t) \, dt$$

est continue.

2. Montrer que $\varphi : K \times J^2 \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) \, dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 30 ★★☆☆ Mines 2021 – Elouan O.

1. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}} \, dt =$$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int} \, dt$$

2. En déduire que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) \, dt =$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

3. En déduire la convergence et la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 31 ★☆☆ CCP 2021 - Léna S.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xu)}{u} e^{-u} du$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$$

2. Montrer qu'il existe K tel que

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}$$

3. a) Montrer l'existence de f .
 b) Montrer que f est \mathcal{C}^1 et trouver $f'(x)$.
 En déduire $f(x)$.
4. Montrer l'existence du réel

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-ux} du$$

5. On suppose L continue en 0. calculer $L(0)$.

Exercice 32 ★☆☆ Mines 2021 - Elise R.

Déterminer $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que, pour tout réel x :

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$$

Exercice 33 ★☆☆ CCP 2021 - Gabrielle V.

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+^* .
2. a) Écrire $\frac{\ln t}{t+1}$ sous forme de somme.
 b) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
 Calculer $f(1)$.
3. Montrer que

$$f(x) = \ln(x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int_0^1 \frac{\ln u}{1+u} du + \int_0^{1/x} \frac{\ln u}{1+u} du$$

4. a) Exprimer $f'(x)$ sans symbole intégral.
 b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .
5. a) On définit $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $g'(x) = -\frac{\ln x}{x}$.
 b) Exprimer $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles (en explicitant la constante).

Exercice 34 ★☆☆ CCP 2022 - Sacha F.

Pour tout x réel on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$$

1. Trouver deux réels $a(x)$ et $b(x)$ tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{a(x)}{1+x^2t^2} + \frac{b(x)}{1+t^2}$$

2. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
 3. Montrer que f est \mathcal{C}^1 et exprimer sa dérivée f' avec une intégrale.
 4. Donner une expression de f sans signe intégral.
 5. Calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{1+t^2}\right)^2 dt$$

Commentaire : Examinatrice à l'écoute, très gentille, aide quand on bloque, bref super. (Il y a un deuxième exo donné à l'oral.)

Exercice 35 ★☆☆ Navale 2022 - Uther C.

(exo 1)

On pose $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+\sqrt{1+t^2}} dt$.

Étude.

Commentaire : Il y avait aussi un exo 2 de probas. Oral super nice ! Examineur qui avait la vibe d'un doudou à barbe.

Exercice 36 ★☆☆ CCP 2018

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n}$.

Existence et limite des I_n ?

Exercice 37 ★☆☆ Mines 2022 - Gabrielle V.

(exo 1)

On définit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Trouver un élément de symétrie de la courbe $y = f(x)$.
3. Montrer que f est continue.
4. Calculer la limite de f en 0^+ .
5. Donner un équivalent de f en 0^+ .

Exercice 38 ★★☆☆ Mines 2022 – Aurélien T.

(exo 1)

Pour f continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} , on note

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

et on appelle \mathcal{L}_f l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\varphi(x)$ converge.

1. Montrer que \mathcal{L}_f est toujours d'une des formes suivantes :
 - \emptyset
 - $]a; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
 - $[a; +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner quatre exemples de fonctions f pour lesquelles :
 - $\mathcal{L}_f = \emptyset$
 - $\mathcal{L}_f = \mathbb{R}$
 - $\mathcal{L}_f =]1; +\infty[$
 - $\mathcal{L}_f = [1; +\infty[$
3. On suppose que $\mathcal{L}_f =]a; +\infty[$, montrer que φ est continue sur \mathcal{L}_f .

Commentaire : À mon avis il fallait utiliser la continuité sous le signe intégral sur un intervalle $]a; b[$, mais je n'y ai pensé que sous la douche :(

Exercice 39 ★★☆☆ Centrale 1 2022 – Aurélien T.

On pose $J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$.

1. Montrer que J_n est \mathcal{C}^2 et expliciter $J'_n(x)$ et $J''_n(x)$.
2. Trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par J_n .

Commentaire : Examineur qui ne parle pas énormément et masqué donc j'entendais mal ce qu'il disait. Conseil : être bien réveillé et prendre un café pour les épreuves du matin...

Exercice 40 ★★☆☆ Centrale 2 2022 – Nathan A.

On définit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathbb{C}^*, \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$$

Pour $s \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2+s)}}{t+s} dt$$

$$\varphi(s) = \int_1^{+\infty} e^{-t^2 s} dt$$

1. Prouver la convergence de $f_s(x)$.
2. Écrire une fonction `integr(u)` permettant de calculer

$$\int_0^{+\infty} u(t) dt$$

lorsque u est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

En déduire des fonctions `f(x,s)` et `phi(s)`.

Remarque : la fonction `quad` ne fonctionne pas avec les fonctions à valeurs complexes.

3. Tracer la courbe de f_s sur $[0; 20]$, pour

$$s \in \{1, i, 2 - i\}$$

Que peut-on conjecturer ?

4. (*Je ne sais pas car pas fait.*)
5. Prouver la conjecture de la question 3.
6. Montrer que f_s est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
Est-elle \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}_+ ?

Commentaire : Vraiment boulettes sur boulettes... En plus, je n'ai pas la remarque sur la fonction `quad` donc mes algos n'étaient pas valides. L'examineur était neutre et manquait d'entrain.

Exercice 41 ★★☆☆ X 2016

Soit $f : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2 - 2i\pi xt) dx$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f . Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
2. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f . En déduire f .

Exercice 42 ★★☆☆ Centrale 2 2018

Pour α, x deux réels on pose $f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-tx^2}}{1+t^2} dt$.

1. Trouver l'ensemble \mathcal{A} des valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On prend $\alpha \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $x \in I$. Tracer à l'aide de python le graphe de la fonction f_α pour dix valeurs de α dans les cas suivants :

- a) $I = [-10; 10]$ et $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
- b) $I = [-1; 1]$ et $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
- c) $I = [-1; 1]$ et $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap]-\infty; 0]$.
- d) $I = [-1; 1]$ et $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap [0; +\infty[$.

Que peut-on conjecturer sur la limite de f_α en $+\infty$? Sur la continuité de f_α ? Sur la dérivabilité de f_α ?

3. Comparer $f_\alpha(0)$ et $f_{-\alpha}(0)$.

- En considérant $\frac{1}{2}(f_\alpha(0) + f_{-\alpha}(0))$, montrer que $f_\alpha(0) \geq \frac{\pi}{2}$.
- Démontrer la continuité de f_α .
- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ existe.
- Montrer que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 43 ★★
☆☆ Mines 2018

Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$.

- Montrer que f est intégrable sur $]0; +\infty[$.
- Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x)e^{-(n+1)x}$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (n+1)^2}$.

Exercice 44 ★★
☆☆ Centrale 2018

On pose $f : x \in]0; 1[\mapsto \frac{x^2}{x-1} \ln x$.

- Montrer que f est prolongeable en 0 et en 1 en une fonction (que l'on notera encore f) de classe \mathcal{C}^1 .
- Montrer que $\int_0^1 x^n f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et trouver un équivalent.
- Montrer que $\int_0^1 \frac{x^2}{x-1} \ln x dx = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 45 ★★
☆☆ X 2016

Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$. Montrer que f est bien définie puis déterminer ses limites en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 46 ★★
☆☆ X 2013

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^x (1 + \sin(2t))^{1/t} dt \right)$.

Exercice 47 ★★
☆☆ ENS 2016

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-intégrale* qui est la fonction $I_{1/2}f$ définie par :

$$I_{1/2}f(0) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on lui associe sa *demi-dérivée* qui est la fonction $D_{1/2}f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, D_{1/2}f(x) = \frac{d}{dx} [I_{1/2}f(x)]$$

- Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Vérifier que $I_{1/2}f$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ . Montrer que

$$I_{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} dt$$

- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que $D_{1/2}$ est bien définie et que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$D_{1/2}f(x) = I_{1/2}(f')(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{x}}$$

- Pour $f : x \mapsto x^n$, calculer $I_{1/2}f$.
(On peut considérer $X_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$.)
- Pour $f : x \mapsto x^{n+1/2}$, calculer $I_{1/2}f$.
- En déduire les relations suivantes pour toute fonction polynomiale f :

$$I_{1/2}I_{1/2}f = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad D_{1/2}I_{1/2}f = f$$

- Généraliser les résultats de la fonction précédente pour f développable en série entière. Discuter enfin le cas où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Exercice 48 ★★
☆☆ X 2012

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 x \exp(-xt \ln t) dt$.

- Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et étudier sa régularité.
- Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.

— Séries entières —

Exercice 49 ★★
☆☆ Telecom 2021 – Elise R.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel non multiple de π .

On définit $\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n! \sin^n(\alpha)} x^n$.

Déterminer le rayon de convergence de φ_α .

Calculer $\varphi_{\pi/2}$.

Exercice 50 ★★
☆☆ Telecom 2021 – Thibault D.

Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

Commentaire : C'est facile. (...) Bilan : je suis arrivé, j'ai paniqué, j'ai raté.

Exercice 51 ★★ ENS 2021 – Elouan O.

Soit u une fonction DSE au voisinage de 0, avec

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Soit φ vérifiant l'équation différentielle $x\varphi'' = u\varphi$.

1. Y a-t-il unicité de la solution en 0 ?
2. Existe-t-il une solution φ DSE au voisinage de 0 ?

Exercice 52 ★★ CCP 2021 – Eva T.

Domaine de définition et calcul de

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$$

Exercice 53 ★★ Mines 2021 – Adam P.

On pose $a_0 = a_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$$

1. Déterminer la limite de $(a_n)_{n \geq 0}$.
2. Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que S a un rayon de convergence non nul et calculer sa somme (à l'aide d'une équation diff). En déduire :

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n - k + 1)$$

Exercice 54 ★★ CCP 2018

Donner le DSE de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$. On pose $I = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$. Prouver la convergence de I et montrer que

$$I = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice 55 ★★ CCP 2018

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Donner le rayon R' de $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^3 z^n$.

2. On pose $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt$.

Donner la limite de (a_n) .

Exercice 56 ★★ CCP 2018

On définit la suite (a_n) par $a_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$. On pose

$$\varphi : \begin{cases} [0; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) - x \end{cases}$$

1. Étudier les variations de φ sur \mathbb{R}^+ et montrer que $\ln(1+x) \leq x$.
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
b) Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.
3. On admet le théorème de Cesaro.
a) Soit $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de (u_n) et en déduire un équivalent de (a_n) de la forme $b_n = \frac{k}{n}$.
b) Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$.

Exercice 57 ★★ St Cyr 2022 – Gabrielle V.

(exo 2)

On pose $\beta_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_k$$

1. Écrire une fonction qui prend un entier n et renvoie β_n .
2. Écrire un script qui renvoie la liste des $(\beta_n)_{0 \leq n \leq 10}$.
3. Montrer que $\sum \frac{\beta_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence R strictement positif.
4. On définit $f :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$

À partir d'une équation différentielle vérifiée par f , donner une écriture simplifiée de f .

Exercice 58 ★★ Centrale 2 2022 – Mathilde D.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est CC^∞ sur \mathbb{R}^* et montrer l'existence pour tout n d'un polynôme P_n tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(t) = P_n \left(\frac{1}{t} \right) e^{-1/t^2}$$

2. Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} . Est-ce que f est développable en série entière en 0 ?

3. Programmer une fonction $b(n, f, r)$ qui calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\exp(ir\theta))}{\exp(i\theta)^n} d\theta$$

Afficher b pour $n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ et r allant de 0.1 à 0.9 par pas de 0.1, avec $f(z) = \exp(-z)$ puis $f(z) = (1+z)^{-1}$.

Conjecturer.

Commentaire : Il y avait sept autres questions.

Exercice 59 ★★ Mines 2022 – Cécile F.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers a et b . Montrer que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ab$$

Question annexe : Redémontrer le théorème de Cesaro.

Exercice 60 ★★ Mines 2022 – Ethan A.

(exo 3, sur 4 exercices...)

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Rayon de convergence R de f ?
2. Équivalent de f en R^- .

Exercice 61 ★★ Centrale 2018

Sur un disque ouvert $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est définie

$$F : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

Soit $(z_k)_{k \geq 1}$ une suite de complexes non nuls telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = 0$. Montrer que

$$\forall k \geq 1, F(z_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0$$

Exercice 62 ★★ Mines 2018

Soit $n \geq 1$. Calculer $w_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$.

On utilisera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Exercice 63 ★★ Centrale 2 2018

On définit les deux suites de termes

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos(t))^{2n} dt$$

$$u_n = \int_0^1 nt^n(1-t)^{n-1} dt$$

1. On pose $\Lambda_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} dt$.

Calculer Λ_p pour $p \in \mathbb{Z}$.

2. a) Trouver une relation entre a_n et Λ_p pour $p \in \llbracket -2n; 2n \rrbracket$.

b) Montrer que $a_n = \binom{2n}{n}$.

c) Écrire une fonction python renvoyant a_n .

3. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.

4. Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

5. Montrer que $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 64 ★★ X 2018

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = a_0 + \dots + a_n$. Montrer que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 65 ★★ Centrale 2 2018

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = 1 \\ \forall n \geq 3, na_n = na_{n-1} - \alpha a_{n-3} \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$na_n = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \alpha a_{n-1} + \alpha a_{n-2}$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

2. a) Définir une fonction `suiteA(n,alpha)`.

b) Tracer $(a_n)_{0 \leq n \leq 200}$ pour $\alpha = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. Conjecturer la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) On admet le théorème de Cesaro, démontrer la conjecture.

3. a) On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, trouver un minorant du rayon de convergence R .

b) Tracer $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Qu'en déduire sur R ?

4. a) Montrer que pour tout $x \in]-R; R[$, $(1-x)f'(x) = P(x)f(x)$ où P est un polynôme à déterminer.

b) Déterminer f .

Exercice 66 ★★ ENS 2016

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de f_n :
 $t \mapsto \sum_{i=n}^{+\infty} t^i$ quand $t \rightarrow 1^-$.
- Soit (a_n) une suite réelle qui tend vers 1. Soit
 $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Déterminer le rayon de convergence de g et donner un équivalent de $g(t)$ quand $t \rightarrow 1^-$.

Exercice 67 ★★ X 2014

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Exercice 68 ★★ X 2014

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in]0; 1[\mapsto \sum_{k=0}^n x^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}$.

Montrer que (f_n) converge simplement et déterminer sa limite.

— Suites et séries de fonctions —

Exercice 69 ★★ CCP 2021 – Henri T.

On pose $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier qu'on a pour tout $t \in [0; 1]$ l'inégalité

$$t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$$

- Montrer que

$$\int_0^1 t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Calculer $\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt$.

- En déduire la nature de (a_n) et de $\sum a_n$.
- a) Quelle est la nature de $\sum (-1)^n a_n$?
 b) Donner le domaine de définition de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- Soit $x \in]-1; 1[$. Écrire $f(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Exercice 70 ★★ ENS Ulm 2021 – Raphaël M.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ bornée telle que $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0. On pose $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n 2^{-k} f(3^k x)$.

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers une application continue F qui vérifie l'équation $F(3x) = 2F(x)$. Que dire du mode de convergence ?

Exercice 71 ★★ Centrale 1 2021 – Marion L.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation

$$x^n + xt\sqrt{n} - 1 = 0,$$

d'inconnue x , admet une unique solution réelle positive, que l'on notera $u_n(t)$.

- Montrer que $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite et un équivalent.
- Étudier $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ et $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n(t)$

Exercice 72 ★★ ENS Lyon/Ulm 2021 – Rémy D.

Lorsque A est une partie de \mathbb{N}^* , on pose pour $s \in \mathbb{R}$:

$$\zeta_A(s) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^s}$$

On pose aussi

$$o(A) = \inf \{s \in \mathbb{R}, \zeta_A(s) \text{ converge}\}$$

- Soit $d \in \mathbb{N}$ et $A_d = \{n^d, n \in \mathbb{N}^*\}$.
 Que vaut $o(A_d)$?
- Soit $d \in \llbracket 1; 9 \rrbracket$ et A l'ensemble des entiers dont tous les chiffres sont $< d$. Que vaut $o(A)$?

Exercice 73 ★★ Telecom 2022 – Guillaume C.

(exo 2)

Soit α un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$$

- Montrer que (f_n) converge simplement et donner sa limite.
- Donner les valeurs de α pour lesquelles (f_n) converge uniformément.

Exercice 74 ★★ CCP 2022 – Gabrielle V.

(exo 2)

On considère $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série $\sum f_n$.

Commentaire : Elle s'est trompé en me le donnant, j'ai fait la première question et après elle s'en est rendu compte et a changé l'exo.

Exercice 75 ★★
★☆☆ Centrale 1 2021 - Léna S.

On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{k}}$.

1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D} de f ? Étudier la continuité de f sur \mathcal{D} .
2. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? La déterminer.
3. Trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 76 ★★
★☆☆ Centrale 1 2022 - Thomas D.

Pour $u > 1$ et $s \in \mathbb{R}_+^*$ on définit :

$$\varphi_u(s) = (1 + u^s)^{-1}$$

1. Montrer que u est \mathcal{C}^∞ .
Calculer φ'_u et φ''_u .
2. Montrer que $(\varphi_u^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est libre.
3. Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe des scalaires $a_{0\ell}, \dots, a_{\ell\ell}$ tels que

$$\varphi_u^{(\ell)} = (\ln u)^\ell \sum_{j=0}^{\ell} a_{j\ell} \varphi_u^{j+1}$$

Exercice 77 ★★
★☆☆ Mines 2018

On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$ pour $x \geq 0$.

1. Établir la convergence simple.
2. Montrer que la convergence n'est pas normale sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer que pour $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x e^{-x}}{\ln(n+1)(1 - e^{-x})}$$

En déduire la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 78 ★★
★☆☆ Centrale 2 2018

Soit (a_n) une suite quelconque. On cherche à construire une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$.

1. Soit $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n(1/x) \varphi(x)$.
- b) En déduire que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. On définit $\psi(x) = \varphi(x)\varphi(1-x)$ et

$$\theta(x) = \frac{\int_0^{2x} \psi(t) dt}{\int_0^1 \psi(t) dt}$$

- a) Représenter à l'aide de PYTHON, θ sur $[-2; 2]$. Qu'observe-t-on?
- b) Démontrer cette conjecture.

3. Construire une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty$ telle que

$$0 \leq g \leq 1 \text{ et } \begin{cases} g(x) = 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ g(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

4. Soit $\lambda_n = \max(1, |a_n|)$.

Montrer que $\sum_{n \geq p+1} \frac{\lambda_n^{p-n} |a_n|}{(n-p)!}$ converge.

5. Soit $f_n(x) = g(\lambda_n x) a_n \frac{x^n}{n!}$.

Déduire que de la question précédente que $\sum_{n \geq 0} f_n$ CV simplement.

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R} .

7. Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction \mathcal{C}^∞ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = a_k$.

Exercice 79 ★★
★☆☆ Mines 2018

On pose $u_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{n+n^2x} \end{cases}$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.
2. Soit $f(x)$ la somme, montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$$

grâce à une comparaison série-intégrale.

Exercice 80 ★★
★☆☆ Centrale 1 2022 - Maya E.

On pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Ensemble de définition?
2. Montrer que ζ est \mathcal{C}^∞ sur $]1; +\infty[$.
3. Montrer que $(\ln \zeta(s))'' \geq 0$.

4. Équivalents en 1 et $+\infty$.

Exercice 81 ★★ X 2018

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} convergeant simplement vers une fonction f . On suppose les f_n croissantes et la fonction f continue. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément.

Exercice 82 ★★ X-ESPCI 2022 – Hadrien B.

On se donne une suite de fonctions $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

On suppose que $(f'_n - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

Commentaire : Oral catastrophe alors que c'était pas dur.

Exercice 83 ★★ X 2016

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k})$.

Déterminer la limite de $(P_n(x))_{n \geq 0}$.

Exercice 84 ★★ ENS 2016

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série réelle absolument convergente.

Soit $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[1; +\infty[$.

2. Donner une condition suffisante pour que F soit intégrable sur $[1; +\infty[$.

Exercice 85 ★★ CCP 2022 – Damien F.

(exo 2)

On pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{\sqrt{n}}$.

Montrer que (f_n) converge normalement sur tout segment $[-a; a]$ mais ne converge pas normalement sur \mathbb{R} .

— Équations différentielles —

Exercice 86 ★★ X 2021 – Cyprien F.

Soit $b \geq 0$. Trouver les $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$f^2 \leq b^2 - (b - f')^2$$

Exercice 87 ★★ Centrale 1 – Pierre V.

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) \leq 0$.

1. Montrer que

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, g(t) \leq g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0)$$

2. Soit q une fonction continue sur \mathbb{R} telle que $\forall t \in \mathbb{R}, q(t) \geq a$, où $a \geq 0$ est une constante. Soit f une solution de $f'' + qf = 0$. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas majoré.

Exercice 88 ★★ Centrale 1 2021 – Ivan G.

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$ de classe C^1 et strictement croissante. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

1. Montrer que y est bornée.

On pourra utiliser $z = y^2 + \frac{(y')^2}{q}$.

2. Montrer que y s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}_+ .

3. On suppose que $y \neq 0$. Montrer que les zéros de y sont isolés, c'est-à-dire que : Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t_0) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que y ne s'annule pas sur $]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[\setminus \{t_0\}$.

Exercice 89 ★★ X-ESPCI 2021 – Elouan O.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$(E_n) : \begin{cases} y' &= -\frac{1}{n}y \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

On note f_n une solution de (E_n) .

1. Existence et unicité des f_n ? Vers quelle fonction les f_n convergent-elles simplement?

2. Y a-t-il convergence uniforme?

Exercice 90 ★★ Telecom 2022 – Mathilde D.

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

On utilisera un développement en série entière.

Exercice 91 ★★ CCP 2022 – Guillaume C.

(exo 2)

Résoudre $x'' + x = \cos^3(t)$.

Exercice 92 ★★ Mines 2022 – Dimitri B.

(exo 2)

Résoudre l'équation (d'inconnue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable) :

$$f''(x) + f(-x) = x$$

Indication : on peut décomposer f en somme d'une fonction paire et impaire.

Exercice 93 ★★ ENS 2018

Soit f de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et 1-périodique. Existe-t-il u 1-périodique telle que $u' + u = f$? Si oui, y a-t-il unicité?

Exercice 94 ★★ CCP 2018

On se donne l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0 \quad (E)$$

1. Donner la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit (a_n) une suite telle que
$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} \end{cases}$$

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence de f .

b) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

3. Soit (b_n) une suite de nombres réels et R' le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. On suppose de $R' > 0$ et on pose

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n. \text{ Montrer que } g \text{ vérifie (E) et}$$

$g(0) = 1$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

4. On suppose $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et

$$\text{on pose } z : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{y(x)}{f(x)} \end{cases} \text{ Montrer que}$$

y est solution de (E) ssi z' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

5. Exprimer z' à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 95 ★★ Mines 2022 - Kahina B.

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'ED :

$$z''(x) - 2z'(x) - (y^2 - 1)z(x) = 0$$

avec les conditions initiales :

$$z(0) = 1 \text{ et } z'(0) = 0$$

1. Résoudre l'ED.

On note z_y la solution (dépendant de y).

2. On définit $f(x, y) = z_y(x)$.

Étudier la continuité de f puis la dérivabilité par rapport à chacune des variables.

Exercice 96 ★★ Mines 2021 - Ivain G.

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$(x+y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x-y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On fera le changement de variables $u = x^2 - y^2 - 2xy$ et $v = y$.

Exercice 97 ★★ Centrale 1 2021 - Zaccarie K.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\partial_1 f(x, y) + y\partial_2 f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

1. On fixe (x, y) et on pose $g(t) = f(xt, yt)$. Montrer que g est \mathcal{C}^1 et donner g' .

2. En déduire

$$f(x, y) = f(0, 0) + \int_0^1 \frac{\sin(t^2(x^2 + y^2))}{t} dt$$

3. Montrer que f est bornée.

Exercice 98 ★★ CCP 2018

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Quels sont les points critiques de f ?

2. $(0, 0)$ est-il un extremum local? global?

3. Montrer que $(1, 1)$ n'est pas un extremum global.

Exercice 99 ★★ CCP 2022 - Aurélien T.

Soit $f :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

1. Montrer que (e, e) est point critique de f .

2. Écrire un $DL_3(0)$ de $f(e-x, e+x)$.

Exercice 100 ★★ ENS 2018

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, il existe une sphère qui coupe \mathcal{C}_f en $(a; f(a))$ et qui est en dessous de \mathcal{C}_f .

Exercice 101 ★★ Centrale 2018

On pose $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

1. Donner $f(\mathbb{R}^2)$.

2. Déterminer les extrema de f .

Exercice 102 ★★ Centrale 2018

1. Donner l'énoncé du théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. Soit h une fonction à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^1 et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$. On définit l'application

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{h(x) - h(y)}{x - y} & \text{si } (x, y) \notin \Delta \\ h'(x) & \text{si } (x, y) \in \Delta. \end{cases}$$

- a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- b) Montrer que si h est de classe \mathcal{C}^2 , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 103 ★★
★☆☆) ENS 2017

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soient N une norme sur \mathbb{R}^n , $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq a N(x - y)^2$$

Montrer que : $\lim_{N(x) \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 104 ★★
★☆☆) Centrale 2018

Soit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec f de classe \mathcal{C}^2 . On dit que f est une fonction **harmonique** lorsqu'elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

1. Trouver toutes les fonctions harmoniques de \mathcal{U} dans \mathbb{R} qui s'écrivent

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

2. Trouver toutes les fonctions harmoniques f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} qui s'écrivent

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \Phi(x) \cdot \Psi(y)$$

avec Φ et Ψ des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , et vérifiant $f(0, 0) = 0$.

Exercice 105 ★★
★☆☆) ENS 2018

Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) = g(a)$ et $f \leq g$. Montrer que les graphes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g de f et g admettent le même plan tangent en a .

Exercice 106 ★★
★☆☆) X 2017

Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, n un entier supérieur ou égal à 2, et f l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par l'égalité $f(X) = g(\|X\|^2)$. Déterminer les fonctions f telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 107 ★★
★☆☆) Mines 2022 – Maya E.

(exo 1)
Pour $\alpha > 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on pose

$$f_\alpha(x, y) = |xy|^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

et $f(0, 0) = 0$.

1. Déterminer l'ensemble C_α des points où f_α est continue.
2. Déterminer l'ensemble D_α des points où f_α admet des dérivées partielles. Calculer ces dérivées partielles.
3. Déterminer le plus grand ouvert E_α sur lequel f_α est \mathcal{C}^1 .