

16. Oraux – Probabilités, divers

- ☆☆☆☆ Exercice d'application simple
- ★★☆☆ Petit échauffement tranquille
- ★★★☆☆ Encore très abordable
- ★★★★☆ Mérite réflexion
- ★★★★★ Exercice bien énervé

- ♥ Basique à maîtriser quasi par cœur
- 💡 Exercice standard / super classique
- 📖 Solution longue, il faut s'accrocher
- 💻 Contient du PYTHON

— Probabilités —

Exercice 1 ☆☆ CCP 2021 – Uther C.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = a$. Montrer que les deux inégalités :

$$\mathbb{P}(X \geq 2a) \leq \mathbb{P}((X + 1 - a)^2 \leq (a + 1)^2)$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2a) \leq \frac{1}{1 + a}$$

Exercice 2 ☆☆ Centrale 1 2021 – Marceau O.

On dispose de $p + 1$ urnes numérotées de 0 à p . Dans l'urne n° i , il y a i boules blanches et $p - i$ boules noires. On tire successivement et avec remise n boules blanches dans une des urnes choisie aléatoirement. On note N_p la variable qui compte le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de N_p .
2. Quelle est l'espérance de N_p ?
3. Existence et calcul de $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(N_p = j)$, où $j \in \mathbb{N}$ est fixé.

Exercice 3 ☆☆ Mines 2018

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé, les A_n étant incompatibles. Existence et valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$?

Exercice 4 ☆☆ Centrale 2 2021 – Hadrien B.

On définit les deux matrices

$$A_n(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & X_2(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & X_n(\omega) \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

où X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On pose $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que A_n et B_n sont diagonalisables.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_{(n)})$.
4. Écrire en Python une fonction créant la matrice B_n . Calculer en Python le polynôme caractéristique de B_n pour $n \in \llbracket 2; 5 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer sur ce polynôme caractéristique, pour n quelconque ?
5. Démontrer cette conjecture.
6. On pose $\langle X, Y \rangle = X^T \cdot Y$ pour toutes matrices $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\max(\text{Sp}(M)) = \sup_{\|X\|=1} \langle X, MX \rangle$$

Exercice 5 ☆☆ CCP 2021 – Estèle R.

(exo 1)

Soient deux variables aléatoires X et Y , indépendantes et de même loi, avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et admettant une variance $\mathbb{V}(X)$. On se donne aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = 1 - q \in]0; 1[$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X - Y)$. Calculer $\mathbb{V}(X - Y)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$.
2. a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$$

- b) Dans cette question seulement, X et Y suivent la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. a) Dans cette question seulement, X et Y suivent la loi géométrique de paramètre p . Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- b) Donner la loi de $Z = X - Y$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) \leq \frac{1}{k}$.

Exercice 6 (☆☆) Mines 2021 – Rafael M.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , qui admet une espérance.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X > k) = (n+1)\mathbb{P}(X > n) + \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k)$$

2. Donner une expression de $\mathbb{E}(X)$ en fonction des $\mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 7 (☆☆) CCP 2018

On dispose d'une urne contenant des boules noires et des boules blanches. On effectue des tirages avec remise. On note p la probabilité de tirer une boule blanche, et on pose $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0, 1[$. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de tirage nécessaire pour obtenir une première boule noire.

- Déterminer la loi de N . Donner son espérance et sa variance.
- On s'intéresse aux séries de type $BBN \dots$ ou $NNB \dots$. On note X la variable aléatoire donnant la longueur de la première chaîne de boules de la même couleur tirées successivement. On note Y la variable aléatoire donnant la longueur de la deuxième chaîne de boules de la même couleur tirées successivement.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$$

b) En déduire la loi de X .

3. On admet que pour $j \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = p^2q^{j-1} + q^2p^{j-1}$$

(On peut aussi le démontrer ! Mais ce n'était pas demandé)

Après avoir déterminé son rayon de convergence, calculer

$$G_Y(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j)t^j$$

- Calculer la loi de $S = X + Y$.
- Pour quelles valeurs de p les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 (☆☆) Mines 2021 – Cyprien F.

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie (À chaque lancer, Pile et Face sont équiprobables). On note X la variable aléatoire égale au

numéro de lancer où on obtient pour la première fois deux « Pile » de suite.

- Donner la fonction génératrice G_X de X .
- Quelle est l'espérance de X ?

Exercice 9 (☆☆) CCP 2018

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$3\mathbb{P}(X = n + 2) = 4\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

Donner la loi vérifiée par X . Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 10 (☆☆) CCP 2018

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = a$.

- Donner un exemple de variable aléatoire satisfaisant cette propriété.
- Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geq 2a) \leq \mathbb{P}[(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2]$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}[(X - a + 1)^2 \geq (a + 1)^2] \leq \frac{1}{a + 1}$$

Exercice 11 (☆☆) CCP 2018

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos^n x}{x^2} \text{ et } I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

- Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0 et déterminer la valeur de $f_n(0)$.
- Montrer que I_n existe et simplifier I_1 .
- Soit $s \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = |s| \frac{\pi}{2}$$

- En déduire I_2 .
- Soit une variable aléatoire qui vérifie :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Calculer $\mathbb{E}(\sin(Xt))$ et $\mathbb{E}(\cos(Xt))$.

Exercice 12 (☆☆) CCP 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p_1 et p_2 . On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Soit $n \geq 1$. exprimer $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Soit $n \geq 1$. exprimer $\mathbb{P}(Z \geq n)$.
3. Déterminer la loi de Z .

Exercice 13 ★★
★☆☆ Mines 2018

On dispose de tiroirs T_1, \dots, T_n et de boules B_1, \dots, B_p . On place les boules dans les tiroirs. On désigne par X_k le nombre de boules dans le tiroir T_k et par Y le nombre de tiroirs vides.

1. Donner la loi de X_k .
2. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont-elles mutuellement indépendantes?
3. Déterminer l'espérance de Y .

Exercice 14 ★★
★☆☆ Centrale 2018

On dispose de $2n$ boules de couleurs toutes différentes, parmi elles n portent le numéro 0 et n sont numérotées de 1 à n . On pioche simultanément une poignée de n boules. On note X_i pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée i est dans la poignée et 0 sinon.

1. Que proposez-vous comme univers? Quelle est la loi de X_i ?
2. Calculer la covariance de X_i et X_j .
3. On introduit la variable aléatoire S qui compte la somme des numéros dans la poignée.
 - a) Exprimer S en fonction de X_1, \dots, X_n .
 - b) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{V}(S)$.

Exercice 15 ★★
★☆☆ Centrale 2 2018

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $r \geq 1$. Soient X_1, \dots, X_r des variables aléatoires à loi uniforme sur $\llbracket 1; r \rrbracket$. Soient $(Z_i)_{i \in \llbracket 1; r \rrbracket}$ des variables indépendantes de lois géométriques :

$$Z_i \sim \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{r}\right)$$

et $S_r = \sum_{i=1}^r Z_i$. On pose enfin

$$T_r = \inf \{n \in \mathbb{N} \mid \text{card}(X_1, \dots, X_n) = r\}$$

1. Rappeler l'espérance et la variance de Z_i .
2. Montrer que $\mathbb{E}(S_r) = rH_r$ et

$$\mathbb{V}(S_r) = -rH_r + r^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

où $H_r = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k}$.

3. Tracer en Python $\left(\frac{H_r}{\ln r}\right)_{r \in \llbracket 2; 50 \rrbracket}$. Conjecture?
4. Démontrer que $H_r \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \ln r$.
5. Expliciter $S_r(\Omega)$ et $T_r(\Omega)$.
6. Comparer les lois de S_r et T_r sur des simulations en Python.
7. Démontrer les conjectures de la question précédente.

Exercice 16 ★★
★☆☆ Mines 2018

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T > n) > 0$. (T est presque sûrement non bornée) On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n).$$

(Intuition : θ_n donne la probabilité qu'une machine tombe en panne sachant qu'elle fonctionnait).

1. Montrer que $\theta_n \in [0; 1[$.
2. Exprimer $\mathbb{P}(T \geq n)$ en fonction de θ_n .
3. Reconnaître la loi de T lorsque la suite (θ_n) est constante.
4. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \theta_n$ diverge.
5. Réciproquement, on se donne une suite (θ_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0; 1[$ et que $\sum_{n \geq 0} \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être considérée comme un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T .

Exercice 17 ★★
★☆☆ Mines 2018

Soit X et Y indépendantes de loi géométrique de paramètre p .

1. Que vaut $\mathbb{P}(X > n)$?
2. On pose $Z = \min(X, Y)$. Quelle la loi de Z ? Déterminer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 18 ★★
★☆☆ Centrale 2 2018

Soit $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction continues et bornées de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Pour $\alpha \geq 0$, soit $f_\alpha : t \mapsto e^{-\alpha t}$. Soit $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$. Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

1. Montrer que la suite $(T_n(f))$ est bien définie.
2. Exprimer $T_n(f_\alpha)$ et trouver son comportement asymptotique.
3. Programmer une fonction qui affiche les $T_n(f_\alpha)$.

4. Soit $R_n = \sum_{k=N+1}^{+\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} e^{-n}$. Montrer que pour N assez grand on a

$$0 \leq R_n \leq \frac{n^{N+1}}{(N+1)!}$$

5. Écrire un programme qui retourne N tel que $|R_n| < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ donné.

6. Écrire un programme qui retourne les T_n à 10^{-5} près.

7. On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, les X_i sont des v.a. mutuellement indépendantes de loi de poisson de paramètre 1. Calculer $\mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$.

Exercice 19 ★★☆☆ Mines 2018

Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose $A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \bigcup_{n \geq p} A_n$.

1. Montrer que A est un événement. Écrire « en français » une condition sur les (A_n) pour que A soit réalisé.

2. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$. (Remarque : l'hypothèse de mutuelle indépendance ne sert pas ici)

3. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

INDICATION : utiliser $e^{-x} \geq 1 - x$.

Exercice 20 ★★☆☆ Mines 2018

On considère 6 dés identiques à 6 faces. On jette simultanément les 6 dés et on enlève les dés avec lesquels on a obtenu des 6. Puis on recommence avec les dés restants jusqu'à n'obtenir que des 6. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de lancers pour n'obtenir que des 6.

1. Trouver la loi de X .

On pourra d'abord calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$.

2. X a-t-elle une espérance, une variance ?

Exercice 21 ★★☆☆ Centrale 2 2018

Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note \mathbf{A}_n la matrice symétrique $(a_{i,j})$ telle que pour $1 \leq i \leq j \leq n$, $a_{i,j} = a_{j,i} = X_{i,j}$.

1. On note $\mathbb{E}(\mathbf{P})$ l'espérance d'une matrice \mathbf{P} .

Montrer que $\mathbb{E}(\mathbf{A}_n^2) = n\mathbf{I}_n$.

2. On note $D_n = \det(\mathbf{A}_n)$ et $\Delta_n = \mathbb{E}(D_n)$. On définit la variable aléatoire M_k par

$$M_k = \frac{D_n^{(1)} + \dots + D_n^{(k)}}{k}$$

avec $D_n^{(1)}, \dots, D_n^{(k)}$ des v.a. indépendantes de même loi que D_n . Expliquer pourquoi à l'aide de calcul informatique de M_k , on peut obtenir une bonne approximation de Δ_n .

3. Écrire une fonction `sym(n)` qui crée une matrice \mathbf{A}_n .

4. Écrire une fonction `esperance_det(n)` qui retourne la variable M_k avec $k = 10^4$.

5. À l'aide de cette dernière fonction, estimer la valeur de Δ_n pour $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Conjecturer l'expression de Δ_{2n} .

Exercice 22 ★★☆☆ Mines 2018

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge. Dans ce cas, montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 23 ★★☆☆ Mines 2018

On lance une pièce et on gagne 1 euro si le résultat du lancer est différent de celui du précédent lancer. On note X_n le gain obtenu au $n^{\text{ème}}$ lancer pour $n \geq 2$.

1. Que vaut $\mathbb{E}(X_2)$, $\mathbb{E}(X_3)$?

2. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n - 1)$.

3. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k)$, $\mathbb{P}(X_n = k - 1)$.

4. Reconnaitre la loi de X_n .

Exercice 24 ★★☆☆ Centrale 2018

On considère une urne avec des boules blanches et des boules noires, ces dernières en proportion $p \in]0; 1[$. On effectue des tirages avec remise. Soit X la longueur de la première suite de tirages de même couleur et Y la seconde suite. Par exemple $(n, n, b, b, b, n, \dots)$ ou $(b, b, n, n, n, b, \dots)$ donne $X = 2$ et $Y = 3$.

1. Déterminer la loi de (X, Y) .

2. Donner la loi de X et son espérance.

3. Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 25 ★★ X 2018

On considère n couples formant un ensemble de $2n$ personnes. On suppose que $r \in \llbracket 1; 2n - 1 \rrbracket$ personnes disparaissent. Déterminer le nombre moyen de couples restants.

Exercice 26 ★★ ENS 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{Z} . On définit

$$d(X, Y) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$$

Soit $B = \{k \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{P}(X = k) > \mathbb{P}(Y = k)\}$.

1. Montrer que d est atteint en B .
2. Montrer que

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)|$$

3. Montrer que $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

Exercice 27 ★★ ENS 2018

Soit (A_1, \dots, A_n) un n -uplet. On dit que $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ est une *sous-suite croissante* de longueur k lorsque

$$\begin{cases} i_1 < \dots < i_k \\ A_{i_1} < \dots < A_{i_k} \end{cases}$$

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Soit $\ell_n(k)$ le nombre de sous-suites croissantes de longueur k de (X_1, \dots, X_n) . Déterminer l'espérance de $\ell_n(k)$.

Exercice 28 ★★ X 2018

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On pose

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k. \text{ Donner une CNS pour que pour toute}$$

partie A bornée de \mathbb{R} , $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_n \in A) < +\infty$.

Exercice 29 ★★ X 2018

On suppose que N passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et prend une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si leur place est déjà occupée. Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

Exercice 30 ★★ ENS 2016

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_n = 2^j) = \frac{1}{2^j}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\ln(2)S_n}{n \ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

Exercice 31 ★★ ENS 2017

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. A-t-on toujours $\mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n| \geq n\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$?

— Divers —

Exercice 32 ★★ Centrale 1 2021 - Hadrien B.

On pose $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la limite de (u_n) .
2. Trouver un équivalent de (u_n) .

Exercice 33 ★★ Centrale 2 2021 - Elouan O.

Soit (a_n) une suite complexe telle que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

On pose $u_n(z) = a_n e^{-\sqrt{n}z}$ ainsi que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ (sous réserve d'existence).

1. Soit v défini par $v(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, et $v(0) = 1$. Montrer que v est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Comment trouver un majorant de v en utilisant l'outil informatique?
3. Montrer que f est définie et \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
4. Définissez en PYTHON une fonction f qui prend en argument un complexe z et qui renvoie $f(z)$, pour la suite $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ (avec $a_0 = 0$). On pourra approcher $\sum_{n=0}^{+\infty} \cdot$ par $\sum_{n=0}^{20} \cdot \dots$
5. Définissez en PYTHON une fonction **phi**(r, t) qui calcule la valeur

$$\Phi_r(\theta) = \frac{1}{2 \tan \theta} \int_{-\tan \theta}^{\tan \theta} f(1 + iy) e^{i\sqrt{r}y} dy$$

Représenter sur un graphe $\Phi_r(\theta)$ pour $r \in \{5, 8, 10, 12\}$ et $\theta \in]0; \pi/2[$. Conjecturer la limite de $\Phi_r(\theta)$ quand $\theta \rightarrow \pi/2$.

6. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $z = 1 + iy$. Montrer que

$$\left| e^{-\sqrt{n}z} - e^{-\sqrt{n+1}z} \right| \leq |z| \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} e^{-t} dt$$

Exercice 34 ★★☆☆ Centrale 2 2021 – Marceau O.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^n}} dt$.

1. Montrer que I_n est bien défini.
2. Modéliser en PYTHON la suite (I_n) , pour n variant de 1 à 100 par pas de 2. Que peut-on conjecturer ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; 1[$, $\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^n}} \leq 1$.
4. Démontrer la conjecture. On note ℓ la limite de (I_n) .
5. Tracer $n^{2/3}(I_n - \ell)$ en fonction de n , pour n variant de 1 à 500 par pas de 2. Que peut-on conjecturer ?
6. On pose $J_n = I_n - \ell$. En utilisant le changement de variable $u = n(1-t)$, montrer que J_n peut être écrit sous la forme $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$, où f_n est une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 35 ★★☆☆ CCP 2021 – Uther C.

(exercice scandaleux !!) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'en tout réel $a \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ existe. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 36 ★★☆☆ Centrale 2 2021 – Adam P.

Pour $x > 0$ on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ (on admet son existence).

1. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On note $g(x)$ sa somme et $\gamma = -g(1)$.
2. Déterminer à l'aide de PYTHON une valeur approchée de γ .
3. Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$. Calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$. Exprimer f_n à l'aide de PYTHON.
5. Tracer avec PYTHON $(f_{2^n}(x))_{0 \leq n \leq 7}$ et Γ sur $]0; 5]$. Que peut-on conjecturer ? (on admettra cette conjecture pour la suite)
6. Tracer avec PYTHON $g(x) + \ln(x\Gamma(x))$. Conjecture ?
7. Montrer rigoureusement la conjecture de la question précédente.

8. Montrer que Γ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 37 ★★☆☆ Mines 2012

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 38 ★★☆☆ Centrale 2 2021 – Henri T.

On pose $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta) d\theta$.

1. Montrer que $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{u_n}{2}$.
2. Rayon de convergence de $\sum u_n x^n$?
3. Écrire une fonction PYTHON qui retourne $[u_0, \dots, u_{20}]$.
4. Écrire une fonction qui retourne les vingt premiers termes de la suite $\left(\pi \left(\sum_{k=1}^n \frac{2u_k}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire une conjecture sur la nature de $\sum u_k/k^2$.
5. Écrire une fonction qui calcule W_k .

Exercice 39 ★★☆☆ CCP 2014

Soient α, β et γ les racines de $t^3 + t + 1 = 0$. Résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 1 \end{cases}$$

Exercice 40 ★★☆☆ CCP 2013

Dterminer les $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $|a| = |b| = |c| = 1$, $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

Exercice 41 ★★☆☆ X 2015

Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 42 ★★☆☆ Centrale 2015

Montrer que

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$$

Exercice 43 ★★☆☆ Centrale 2014

Soit $a = 2 \cos \frac{\pi}{5}$. Trouver un polynôme P à coefficients entiers, de degré le plus petit possible, tel que $P(a) = 0$.

Exercice 44 ★★☆☆ Mines 2010

Soit Γ la courbe $(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right)$. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de deux tangentes à Γ orthogonales entre elles.

Exercice 45 ★★
★☆☆ Mines 2014

Étudier la courbe paramétrée $f(t) = \left(\tan \frac{t}{3}, \sin t \right)$.

Exercice 46 ★★
★☆☆ Centrale 2014

Soient \mathcal{C} un cercle de centre O , A un point fixé de \mathcal{C} , et M un point décrivant \mathcal{C} . Déterminer le lieu décrit par le centre de gravité du triangle OAM .

Exercice 47 ★★
★☆☆ X 2013

Soient A un ensemble de réel de cardinal $n \geq 2$ et $B = \{a + a', (a, a') \in A^2\}$. Montrer que $2n - 1 \leq \text{Card } B \leq \frac{n(n+1)}{2}$ et donner des exemples de parties pour lesquelles les bornes sont atteintes.

Exercice 48 ★★
★☆☆ X 2015

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un ensemble de $2n + 1$ personnes a la propriété suivante : la masse de chacun des membres de ce groupe mesurée en kg est un nombre entier. En retirant n'importe lequel des membres de ce groupe, il est possible de séparer les autres en deux parties de n personnes, ces deux parties ayant même masse. Que peut-on en conclure sur la masse de chaque individu ?

Exercice 49 ★★
★☆☆ X 2013

Soit $n \geq 2$. Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $(f, f', \dots, f^{(n-1)})$ soit libre et $f^{(n)} = f$.

Exercice 50 ★★
★☆☆ X 2013

Soit $A = \{ \lfloor n\sqrt{2} \rfloor, n \in \mathbb{N} \}$. Montrer que A contient une infinité de puissances de 2.

Exercice 51 ★★
★☆☆ ENS 2014

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $Z(P)$ le nombre de racines de P dans \mathbb{R}_+^* , comptées avec multiplicité.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines réelles sont simples. Montrer que $Z(P') \geq Z(P) - 1$.
2. Soit $P = a_1 X^{n_1} + a_2 X^{n_2} + \dots + a_p X^{n_p}$ où les a_i sont non nuls et $n_1 < n_2 < \dots < n_p$. On note $V(P)$ le nombre de changements de signe de (a_1, \dots, a_p) . Montrer que $V(P) \geq Z(P)$. Montrer que $V(P) - Z(P)$ est un entier pair.
3. Montrer sans calcul que $P(X) = X^7 + 2X^6 - 3X^5 - X^2 + 7X - 8$ a au moins deux racines complexes non réelles.

Exercice 52 ★★
★☆☆ X 2015

Soient A un ensemble et $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -ev des fonctions de A dans \mathbb{R} . Soit F un sev de E de dimension n . Montrer l'existence de f_1, \dots, f_n dans F et de

x_1, \dots, x_n dans A tels que la matrice de coefficients $(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit égale à I_n .

Exercice 53 ★★
★☆☆ ENS 2014

Soit E un \mathbb{R} -ev et $A \subset E$ une partie non vide. L'enveloppe convexe de A est définie par :

$$\text{co}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, n \geq 1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, a_i \in A \right\}$$

1. Dessiner $\text{co}(A)$ lorsque A est un ensemble fini de petit cardinal en dimension 2.
2. On veut montrer le résultat suivant : si (x_1, \dots, x_{n+2}) sont dans \mathbb{R}^n , alors on peut répartir ces $n+2$ points en deux ensembles A et B disjoints dont les enveloppes convexes sont non disjointes. Montrer que si $n = 2$ alors ce résultat est vrai...
 - a) ... pour les sommets d'un carré.
 - b) ... pour la réunion des sommets d'un triangle équilatéral et de son centre de gravité.
3. Soient $x_1, \dots, x_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ non nul tel que

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+2} x_{n+2} = 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+2} = 0 \end{cases}$$

4. Déterminer $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ pour les exemples de la question 2.
5. Conclure.

