

Programme de colle

Semaine n° 2 : 21/09 – 25/09

Algèbre linéaire de première année : rappels et compléments

On continue avec les notions de première année. Certains points ont été revus en cours et TD, mais pas tous.

- Structure d'espace vectoriel. Espaces de référence $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^I$. Espace produit. Applications linéaires.
- Sous-espaces vectoriels. Somme directe d'une famille de sev.
- (HP) Quelques mots sur les hyperplans.
- Base adaptée à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
- Projecteurs et symétries.
Famille de projecteurs $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ associés à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$.
- Théorie de la dimension. Théorème de la base incomplète, de la base extraite. Dimension d'une somme directe. Formule de Grassman. Théorème du rang.
- Matrices. Base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
- Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille, d'une application linéaire. Matrices de passage et formules de changement de base. Matrices équivalentes. Matrices semblables.
- Opérations matricielles. Transposition. Trace.
- Matrices symétriques, antisymétriques. Base et dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
- Matrices par blocs. Opérations par blocs. Matrices triangulaires par blocs, diagonales par blocs. Traduction de certaines propriétés vectorielles (noyau, image, sous espaces stables) sur les blocs d'une matrice représentative dans une base adaptée.
- Opérations élémentaires sur les rangées (transvection, dilatation, transposition). Algorithme du pivot.
- Déterminant (d'une matrice, d'une famille de vecteurs dans une base, d'un endomorphisme). Le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice. Méthodes de calcul.
- Déterminant de Vandermonde.
- Espaces de polynômes $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$. Degré, valuation. Bases échelonnées en degrés (ou en valuations).
- Polynômes de Lagrange associés à une famille de scalaires distincts.

Prévision pour la semaine prochaine : Début de la réduction.