

Programme de colle

Semaine n° 4 : 05/10 – 09/10

Réduction

Contenu du chapitre :

- **Éléments propres**
 - Notion de valeur propre, de spectre $\text{Sp}(u)$, de vecteur propre, d'espace propre $E_\lambda(u)$ d'un endomorphisme u (ou d'une matrice carrée).
 - Une famille d'espaces propres distincts est en somme directe.
 - Conséquence : majoration du nombre de valeurs propres par la dimension de l'espace.
- **Polynôme caractéristique**
 - Polynôme caractéristique χ_u ou χ_A d'un endomorphisme u ou d'une matrice A .
 - Lien avec les valeurs propres. Multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre.
 - Forme du polynôme caractéristique : degré, coefficient dominant, coefficient de degré $n - 1$, coefficient constant.
 - Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
 - La dimension d'un espace propre est majorée par la multiplicité de la vp : $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$.
- **Diagonalisation**
 - Définition (pour un endomorphisme, pour une matrice).
 - Différentes CNS de diagonalisation : la somme des espaces propres est E ; la somme des dimensions des espaces propres est n ; le polynôme caractéristique est scindé et chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre.
 - Condition suffisante : n valeurs propres distinctes.
 - Calcul pratique.
- **Trigonalisation**
 - Définition (pour les endomorphismes, pour les matrices).
 - CNS : le polynôme caractéristique est scindé.
 - Existence d'une trigonalisation dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
 - Expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres complexes.
 - Trigonalisation pratique sur de petits exemples numériques (*on n'a pas de méthode générale au programme.*)
- **Compléments et Applications**
 - Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
 - Matrice compagnon.
 - Suites récurrentes linéaires d'ordre quelconque, à coefficients constants.

Prévision pour la semaine prochaine : Réduction : polynômes de matrices et d'endomorphismes.