1. Nombres. Sommes, produits.

Valeur absolue

Exercice 1.1 Soient x et y deux nombres réels.

1. Montrer que $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.
2. Montrer que $1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

[Commencer par montrer que $xy-1=(x-1)+(y-1)+(x-1)(y-1)$.]

■

Exercice 1.2 Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x-3| = 1/2$.
2. $|x-3| = |x+1|$.
3. $|2x-11| < |x-5|$.
4. $|x^2+x+1| = |3x-1|$.

■

Bornes supérieure/inférieure

Exercice 1.3 Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure, et s'ils existent le maximum et le minimum, des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

- $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- $A' = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.
- $B' = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \mid (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

■

Exercice 1.4 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.

1. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leqslant \sup B$ et $\inf B \leqslant \inf A$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que $A \cup B$ est bornée, puis déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.
3. Que dire pour $A \cap B$?

■

Exercice 1.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup A = \inf B \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B, b - a \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

■

Exercice 1.6 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $D_A = \{|a-b| \mid (a,b) \in A^2\}$ l'ensemble des distances entre deux éléments de A.

1. Montrer que D_A est majorée. On note $\delta(A)$ sa borne supérieure (c'est le **diamètre** de A).
2. Montrer que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.
3. Soit B une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, telle que $A \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est bornée, puis que $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

■

Partie entière

Exercice 1.7 Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lfloor x+y \rfloor$ vaut soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, soit $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
2. Préciser la situation lorsque $x = y$.

■

Exercice 1.8 Déterminer la partie entière du réel $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

[Commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}$.] ■

Exercice 1.9 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. ■

Sommes et produits

Exercice 1.10 — Somme des premiers carrés. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. *(cours)*
2. Redémontrer ce résultat en calculant de deux façons la somme $\sum_{k=0}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$.

Exercice 1.11 Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Changer les indices des sommes dans l'expression suivante de sorte qu'elles contiennent toutes le terme x^k, puis regrouper et simplifier :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k(k-1)x^{k-2} - 3x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} k^2x^k$$

Exercice 1.12 Simplifier les expressions suivantes :

- $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - a_k)$
- $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k)$
- $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Exercice 1.13 Comparer les deux sommes suivantes :

$$S_1(n) = \sum_{i=0}^{n} (5^{i+1} - 3^{i+1})2^{n-1-i} \text{ et } S_2(n) = \sum_{i=0}^{n} (3^{i+1} - 2^{i+1})5^{n-i}$$

Exercice 1.14 Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)2^k$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ en discutant selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(2)$ et en déduire une expression simple de S_n.
3. Calculer de la même façon T_n puis U_n.

Exercice 1.15 On cherche à calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$ d'une manière différente de celle de l'exercice précédent.

1. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} 2^k$.
2. Intervertir les sommes puis simplifier S_n.

Exercice 1.16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes suivantes :

- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min\{i,j\}$
- $\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} ij$
- $\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (i+j)$
- $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Exercice 1.17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$. En déduire $\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$.

Exercice 1.18 Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ des réels.

On pose $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ et $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

1. En considérant le polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$, montrer que $C^2 \leqslant AB$.
2. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des réels strictement positifs. En utilisant le résultat précédent, minorer

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i}\right).$$