2. Calculs analytiques

Généralités

Exercice 2.1 Donner, sans calcul, l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 1+\sin(2x)$

b) $x \mapsto 2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

c) $x \mapsto -\ln(1+x)$

d) $x \mapsto 1-\sqrt{1-x}$

■

Exercice 2.2 Déterminer la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin^2(x)\cos(2x)$

b) $x \mapsto 2\sin\dfrac{x}{2}+3\sin\dfrac{x}{3}$

c) $x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\sin(\pi x)$

■

Exercice 2.3 a) Soit $a>0$. Déterminer une constante C telle que, pour tous $x,y \in [a;+\infty[$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant C|x-y|.$$

b) Existe-t-il une constante C telle que l'inégalité précédente soit valable pour tous $x,y \in \mathbb{R}_+$?

■

Exercice 2.4 Montrer, sans aucun calcul de dérivée, que les fonctions suivantes sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur leur image (que l'on déterminera). Expliciter leur réciproque.

a) $x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}}$

b) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

c) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

■

Exercice 2.5 Déterminer $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}\left(\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)$.

Limites et continuité

Exercice 2.6 1. Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $x\mapsto x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

b) $x\mapsto\frac{\lfloor x\rfloor}{x}$

c) $x\mapsto\frac{x^2+\sin x}{(x+1)^2}$

d) $x\mapsto\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

2. Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

a) $x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x\mapsto\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

c) $x\mapsto\frac{1}{x}-\frac{3}{3x-3x^2+x^3}$

Exercice 2.7 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ? minorée ? majorée ?
2. La fonction f admet-elle un maximum, un minimum ? Préciser $f(\mathbb{R})$.
3. Soit $y\in\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=y$ en fonction de y.

Dérivation

Exercice 2.8 Étudier la dérivabilité et calculer (lorsque c'est possible) la dérivée des fonctions suivantes, en mettant le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe.

a) $x\mapsto(x-1)^3$

b) $x\mapsto(x^2-1)^3$

c) $x\mapsto\frac{3-x}{2+x}$

d) $x\mapsto 4x^2-\frac{1}{x}$

e) $x\mapsto\sin(2x)\cos(x)$

f) $x\mapsto\frac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$

g) $x\mapsto\ln(\ln x)$

h) $x\mapsto\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

Exercice 2.9 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes, sur leur domaine de définition :

a) $x \mapsto |x|^3$

b) $x \mapsto \dfrac{2(x-m)}{|x-m|+m}$ (où $m \in \mathbb{R}_+^*$)

c) $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

d) $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

■

Exercice 2.10 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fonction $x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et de réciproque dérivable sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 2.11 a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

b) En déduire une formule générale donnant les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$.

■

Intégration

Exercice 2.12 1. Calculer les intégrales suivantes, en manipulant les expressions :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+2} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_4^6 \frac{x}{x^2-2} \, \mathrm{d}x$

Pour c), écrire $\frac{x^3}{x+2}$ sous la forme $ax^2+bx+c+\frac{d}{x+2}$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
Pour d), écrire $\frac{x}{x^2-2}$ sous la forme $\frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

2. Calculer des primitives des fonctions suivantes, en manipulant les expressions :

a) $x \mapsto \dfrac{x^2+2x-1}{x+3}$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

c) $x \mapsto \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

d) $\cos^3$

Pour a), écrire $\frac{x^2+2x-1}{x+3}$ sous la forme $ax+b+\frac{c}{x+3}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.
Pour c), faire apparaître la quantité $x+1$ au numérateur.

■

Exercice 2.13 1. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+x) \sin x \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 2x \ln(1+x^2) \, \mathrm{d}x$

2. Calculer des primitives des fonctions suivantes par intégration par parties :

a) $x \mapsto xe^x$

b) $x \mapsto x^2 \sin(2x)$

c) $\sin \circ \ln$

d) $x \mapsto x^n \ln x$ ($n \in \mathbb{N}$)

■

Exercice 2.14 1. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide du changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int_0^1 2x \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad (t = x^2)$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x + x\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (x = e^t)$

c) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{2}{e^x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x \quad (x = \ln t)$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \quad (t = \cos x)$

e) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \quad (t = \sin x)$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x \quad (x = \sin^2 t)$

2. Calculer des primitives des fonctions suivantes, à l'aide du changement de variable indiqué :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x} \quad (t = \sin x)$

b) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad (t = \frac{\sin x}{\cos x})$

c) $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}} \quad (x = \ln t)$

■

Exercice 2.15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n t\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n.

d) En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

■

Exercice 2.16 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la fonction f ainsi définie est paire.

b) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer sa dérivée.

[Pour $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$.]

c) Montrer que pour tout t positif, on a $t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t$.

[Faire une étude de deux fonctions bien choisies.]

d) En déduire un encadrement de $f(x)$, pour $x \geqslant 0$, faisant intervenir l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

e) Calculer $g(x)$, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

■

Pour s'entraîner... (Notamment sur les ensembles de définition et les dérivées)

Exercice 2.17 On peut piocher parmi les points suivants et effectuer une étude de fonction complète ou partielle.

- $x \mapsto e^{1/\ln x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$
- $x \mapsto x+\sqrt{|x^2-1|}$
- $x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x+4}$
- $x \mapsto \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$
- $x \mapsto \ln|\operatorname{sh}(x)-1|$
- $x \mapsto (\cos x+\sin x)^{1/x}$
- $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2-1}$
- $x \mapsto \sin(x)-\sin(3x)$
- $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$
- $x \mapsto |\tan x|+\cos x$
- $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$
- $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$
- $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
- $x \mapsto \tan\dfrac{x}{2}+\sin x$
- $x \mapsto x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$
- $x \mapsto x-\sqrt{x}$
- $x \mapsto \dfrac{x^5-x}{x^2-1}$
- $x \mapsto e^x-x-1$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$
- $x \mapsto \arctan(x)+\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}\right)$
- $x \mapsto \arcsin(e^x)$

■

Pour s'entraîner... (Recherche de primitive)

Exercice 2.18 On peut piocher parmi les points suivants et rechercher une primitive des fonctions indiquées.

Certains points peuvent demander de passer par une intégrale et d'effectuer divers manipulations (IPP, changement de variable...)

- $x \mapsto x^3 + xe^{x^2}$
- $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$
- $x \mapsto \cos x \sin x$
- tan
- $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$
- $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $x \mapsto \cos^3 x$
- $x \mapsto e^x \cos x$
- $x \mapsto x \ln x$
- $x \mapsto x \arctan x$
- $x \mapsto (x-1)\sin x$
- $x \mapsto (x+1)e^x$
- ln
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+1}$
- $x \mapsto \ln(1+x^2)$
- arctan
- $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$
- $x \mapsto \dfrac{\sin x}{3+\cos^2 x}$
- $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x^2}$

■

Un problème complet

Exercice 2.19 On étudit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ pour tout réel positif x.

Préliminaire

1) Soit g définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $g(x) = e^x - x - 1$.
   Donner la dérivée de g et dresser son tableau de variations.
   En déduire pour tout $x \geqslant 0$ le signe de $g(x)$.
2) Soit h définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $h(x) = (2-x)e^x - 1$.
   Dresser le tableau de variations de h.
   Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 1$.
   Donner le signe de $h(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+$.

Étude de f

3) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   Calculer f' puis dresser le tableau de variations de f.
4) Indiquer la position de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.
5) Préciser l'équation de la tangente de $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
6) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ en faisant figurer tous les éléments obtenus lors de l'étude.

Étude d'une suite

7) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^n (f(x) - 1)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Déterminer une primitive de la fonction f et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
8) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9) Interpréter géométriquement le nombre $u_n - u_1$.
   Interpréter géométriquement le résultat obtenu à la question précédente.

■