3. Fonctions usuelles

Fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

Exercice 3.1 Soient $x \in [-1;1]$ et $y \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut $\sin(\arcsin x)$? Montrer que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ et que $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Donner des expressions analogues pour $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arccos x)$ et $\tan(\arccos x)$.
3. Donner des expressions analogues pour $\sin(\arctan y)$, $\cos(\arctan y)$ et $\tan(\arctan y)$.

■

Exercice 3.2 Étudier les fonctions $\arcsin \circ \sin$, $\arccos \circ \cos$ et $\arctan \circ \tan$. ■

Exercice 3.3 Établir les formules suivantes :

$$2\arccos \tfrac{3}{4} = \arccos \tfrac{1}{8} \quad ; \quad \arcsin \tfrac{4}{5} = 2\arctan \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$$

[Commencer par calculer le sinus, le cosinus ou la tangente des termes en jeu.] ■

Exercice 3.4 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\arcsin x + \arcsin(1-2x^2)$.

1. Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
2. Calculer la dérivée f' de f, lorsqu'elle existe. En déduire une expression simplifiée de f.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

■

Exercice 3.5 Établir $|\sin(nx)| < n|\sin x|$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x qui n'est pas de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercice 3.6 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\arctan(x) + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$
2. $\arcsin(\tan x) = x$
3. $\arctan x + 2\arctan\left((\sqrt{1+x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$

■

Exercice 3.7 Démontrer les encadrements suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \arctan x \geqslant \dfrac{x}{1+x^2}$
4. $\forall x \in \left]-1;+\infty\right],\ \ln(1+x) \leqslant x$

■

Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

Exercice 3.8 On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(1+e^x)$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur son domaine de définition.
2. Montrer que $g(x) = x + \ln(1+e^{-x})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire que la fonction g admet une asymptote en $+\infty$, et en donner une équation.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

■

Exercice 3.9 Résoudre les équations suivantes (déterminer d'abord leur domaine de validité) :

a. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ b. $2^{x^3} = 3^{x^2}$ c. $\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln y}{\ln x}$ d. $\ln(x) - \log(x) = 1$

■

Exercice 3.10 Soit $a \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

Résoudre l'équation $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. ■

Exercice 3.11 Montrer, pour tout entier $n \geqslant 7$, l'inégalité $\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}$. ■

Exercice 3.12 Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes du domaine, et la dérivée (lorsqu'elle existe) des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto (x+1)^{1-x^2}$ b. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ c. $x \mapsto (\sin x)^{\frac{1}{x}}$

■

Fonctions hyperboliques

Exercice 3.13 1. Exprimer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(2a)$ et fonction de $\operatorname{sh} a$ et $\operatorname{ch} a$.

2. En déduire une expression simplifiée du produit $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \operatorname{ch}(\frac{1}{2})\operatorname{ch}(\frac{1}{4})\operatorname{ch}(\frac{1}{8})\cdots\operatorname{ch}(\frac{1}{2^n})$. ■

Exercice 3.14 — Fonctions hyperboliques réciproques.

1. a. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Expliciter les fonctions $\operatorname{sh} \circ f$ et $f \circ \operatorname{sh}$. Qu'en déduit-on ?
2. a. Montrer que l'équation $(E) : \operatorname{ch}(x) = y$ est équivalente à $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$.
   b. En déduire, pour $y \geqslant 1$ fixé, les solutions x de (E).

■

Exercice 3.15 Soit $a \in \mathbb{R}_+$ fixé. Soient M le point de coordonnées $(\operatorname{ch} a, \operatorname{sh} a)$, et Γ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$, dans un repère orthonormal direct du plan, d'origine O.

1. Justifier que M appartiennent à Γ. Faire une figure.
2. Montrer que le domaine délimité par les droites (OM), (Ox) et la courbe Γ a pour aire $\frac{a}{2}$.
   [On pourra faire le changement de variable $x = \operatorname{ch} t$ dans une intégrale bien choisie.] ■

Exercice 3.16 Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre $\operatorname{ch} x + \cos a = 2\operatorname{sh} x + \sin a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercice 3.17 Faire une étude complète de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

Que vaut $f(\operatorname{th} x)$ et $f\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x}\right)$, quand ces expressions sont définies ? ■

Pour finir, un exercice très avancé...

Exercice 3.18 — (★★) Irrationnalité de $\tan r$, lorsque $r \in \mathbb{Q}^*$.

1. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \cos t \, \mathrm{d}t$.

   Établir que $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ I_{n+1}(x) = 2(2n+1)I_n(x) - 4x^2 I_{n-1}(x)$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des fonctions polynômes $C_n, S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, à coefficients entiers et de degré au plus n, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_n(x) = C_n(x)\cos x + S_n(x)\sin x$$

3. a. Soir $r \in \mathbb{Q}^*$. On admet que $\pi \notin \mathbb{Q}$, il s'ensuit que $\tan r$ est bien défini.

   On se propose de démontrer que $\tan r \notin \mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde et on écrit $r = \dfrac{a}{b}$ et $\tan r = \dfrac{p}{q}$ avec $(a,b,p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ qb^n C_n\left(\dfrac{a}{b}\right) + pb^n S_n\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{I_n(r)}{\cos r} qb^n$.

   b. Montrer que $\dfrac{I_n(r)}{\cos r} qb^n$ est toujours un entier et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{I_n(r)}{\cos r} qb^n = 0$.

   Il s'ensuit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{I_n(r)}{\cos r} qb^n = 0$ pour $n \geqslant n_0$ (on admet ce résultat intuitif qu'on pourra démontrer rigoureusement lors du chapitre sur les suites).

   On va maintenant obtenir une contradiction en montrant que $I_n(r)$ est non nul lorsque n est assez grand.

4. Montrer que si $r \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(r) > 0$.

5. On suppose ici $r \in \left]\dfrac{\pi}{2}; +\infty\right[$.

   a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_{\pi/2}^{r} (r^2 - t^2)^n \cos t \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \left(r - \frac{\pi}{2}\right)\left(r^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^n$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi/2} (r^2 - t^2)^n \cos t \, \mathrm{d}t \geqslant \frac{r^n}{2(n+1)}\left(r^{n+1} - \left(r - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right)$$

   b. En déduire qu'on ne peut pas avoir $I_n(r) = 0$ pour tous les $n \geqslant n_0$.

■