4. Nombres complexes

Révisions élémentaires

Exercice 4.1 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- $\dfrac{1}{2+i}$
- $\dfrac{4+5i}{-2+i}$
- $i+\dfrac{1}{i}$
- $\dfrac{2+i}{-4+3i}$
- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
- $2i(3+i)(2+4i)(1+i)$

2. Soient $z=1+i$ et $z'=1-2i$.

   a. Calculer la forme algébrique de $z^2z'^3$ et de $\dfrac{1}{zz'}$.

   b. Calculer de deux façons différentes le module de $z^2z'^3$.

3. Simplifier l'expression $\overline{z+\dfrac{1}{z}}-\overline{\dfrac{1+z}{\bar{z}}}$.

■

Exercice 4.2 Soit z un nombre complexe non nul.

Montrer que $z\in\mathbb{U}$ si et seulement si $\dfrac{1}{z}=\bar{z}$. ■

Argument - forme trigonométrique

Exercice 4.3 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $-(1-i)^{10}$
- $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{2019}$
- $\sin\theta+i\cos\theta$
- $\dfrac{1+i}{1-i}$
- $\dfrac{1}{1+i\tan\alpha}$
- $1+e^{i\theta}$

■

Exercice 4.4 Trouver tous les entiers naturels n tels que le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel négatif. ■

Géométrie.

Exercice 4.5 Décrire géométriquement les ensembles suivants :

1. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z+i|\}$.
2. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant |z-3| \leqslant 3\}$.
3. $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{5z-2}{z-1}$ est un imaginaire pur$\}$.
4. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$, $B = \{z^3 \mid z \in A\}$ et $C = \{z \mid z^3 \in A\}$.

■

Exercice 4.6 On considère la fonction f qui à tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ associe le complexe $f(z) = \dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$.

1. a. Montrer que $|f(z)| = 1$. Qu'en déduit-on quant à l'image de l'application f ?
   b. Montrer que $\frac{f(z)-1}{z-1} \in \mathbb{R}$. En déduire que les points d'affixe 1, z et $f(z)$ sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de 1 par f.
3. En déduire une construction géométrique de l'image $f(z)$ d'un complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ arbitraire.

■

Exercice 4.7 — (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Montrer :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z' = \lambda z$$

■

Exercice 4.8 On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{B}$, $|z^3 + 2iz| \leqslant 3$.
2. Existe-t-il $z \in \mathbb{B}$ réalisant l'égalité ?

■

Transformation d'expressions - Trigonométrie

Exercice 4.9 Soient λ et μ deux nombres réels.

Simplifier les sommes $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\lambda + \mu)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\lambda + \mu)$. ■

Exercice 4.10 Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

- $\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta$
- $\cos^3\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta$
- $\sin^2\theta\cos^4\theta$
- $\sin^3\theta + \cos^3\theta$
- $\sin^4\theta$

Exercice 4.11 Exprimer les expressions trigonométriques suivantes sous forme d'expressions polynomiales en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$:

- $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta)$
- $\sin(5\theta) + \cos(5\theta)$
- $3\cos(4\theta) + \sin(3\theta)$

Résolution d'équations

Exercice 4.12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $\bar{z}^2 = z^6$
- $z^2 + z\bar{z} = 0$
- $e^z = e^{\bar{z}}$
- $2z + 3\bar{z} = 5$
- $e^z = 2i$

Exercice 4.13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^4 + 4 = 0$
- $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 = 0$
- $z^3 = 8i$

Exercice 4.14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 - iz + (1-3i) = 0$
- $z^{10} - 2i\sqrt{3}z^5 - 4 = 0$
- $z^2 - 2(1-i)z - 4 - 5i = 0$
- $z^3 - (4-i)z^2 + 5(1-i)z + 6i - 6 = 0$

Racines de l'unité

Exercice 4.15 Dans cet exercice, on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$. *(cours)*
2. On pose $z = \omega + \frac{1}{\omega}$. Trouver une équation du second degré satisfaite par z.
3. En déduire des expressions de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\sin(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide de radicaux.

Exercice 4.16 On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, et $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$, $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. Donner une expression simplifiée de $A+B$, puis de AB.
2. En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 4.17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 4.18 Soit $n \geqslant 2$. Calculer les sommes :

1. $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$
2. $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^p \ (p \in \mathbb{Z})$
3. $\sum_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-z}$

Exercice 4.19 Simplifier :

- $j(j+1)$
- $\frac{j}{j^2+1}$
- $\frac{j-1}{j+1}$

Exercice 4.20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $z^n + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exponentielle complexe

Exercice 4.22 Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $e^z = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4.23 — (★) Un oral de l'X.
Soit $Z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'équation $ze^z = Z$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, a au moins une solution.

Exercice 4.24 Simplifier $\frac{e^{ia}-1}{e^{ia}+1}$, pour $a \in \left]-\pi;\pi\right[$.

Exercice 4.25 Soient a, b et c trois réels vérifiant $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$.
Montrer qu'alors $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$.

Fonctions à valeurs complexes

Exercice 4.26 Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$.

Exercice 4.27 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $x \mapsto e^x \cos x$.

Exercice 4.28 Déterminer une primitive de $x \mapsto x \sin x\, e^x$.