5. Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 5.1 Résoudre les équations différentielles suivantes, sur les intervalles indiqués :

- $y' - 5y = x$ sur $\mathbb{R}$.
- $y' + 4y = 2x + e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.
- $y' - \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
- $(1+x^2)y' + xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.
- $y' + y = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- $y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- $xy' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]0; 1[$.
- $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

■

Exercice 5.2 Résoudre le problème de Cauchy suivant sur $]-\infty; 1[$:

$$\begin{cases} (1-x)^2 y' = (2-x)y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

■

Exercice 5.3 On considère l'équation différentielle (E) : $y' \sin x - y \cos x = \sin^2 x$.

1. Résoudre (E) sur les intervalles $I_k =]k\pi; (k+1)\pi[$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Déterminer les solutions de (E) vérifiant $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y(\pi) = 0$ et $y(\pi) = 1$.

■

Exercice 5.4 On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction $g : x \mapsto -f(-x)$ est une solution de (E).
2. En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

■

Exercice 5.5 Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ sur les plus grands domaines possibles. Peut-on trouver des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? ■

Exercice 5.6 On note (E) l'équation différentielle $-x^2y' + xy = y^2$ sur $I =]1;+\infty[$.

1. Peut-on résoudre (E) avec les techniques de résolution vues en cours ?
2. En procédant au changement de fonction inconnue $z = \dfrac{1}{y}$, déterminer les solutions de (E) qui ne s'annulent pas sur I.

■

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 5.7 Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 3y' + 2y = xe^x$
- $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{x}{2}}$
- $y'' + 2y' + 5y = 5x$
- $-2y'' + y' + y = 5x\cos x$.
- $y'' + 3y' + 2y = x\,\mathrm{sh}(x)$. Expliciter la solution dont le graphe est tangent à la première bissectrice des axes à l'origine.
- $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x)$. Expliciter la solution dont le graphe est tangent à l'axe des abscisses en $t = \frac{\pi}{2}$.
- $y'' + y = |x| + 1$
- $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$

■

Exercice 5.8 Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0. \end{cases}$ ■

Exercice 5.9 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 5.10 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2\,\text{th}(x)y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

1. Peut-on résoudre (E) avec les techniques de résolution vues en cours ?
2. Montrer que les solutions de (E_1) : $y' + \text{th}(x)y = 0$ sont des solutions de (E).
   En déduire une solution y_1 de (E) vérifiant $y_1(0) = 1$.
3. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si la fonction $z = \dfrac{y}{y_1}$ est solution de $z'' = 0$.
   En déduire les solutions de (E).

■

Exercice 5.11 Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en effectuant le changement de variable $t = \ln x$. ■

Exercice 5.12 Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » suivant :

$$\begin{cases} f'' = f' + g' - g, \\ g'' = f' + g' - f. \end{cases}$$

[Écrire des équations différentielles vérifiées par les fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.] ■

Divers pas toujours très facile

Exercice 5.13 Résoudre $yy' + y^2 = \frac{1}{2}e^{-2x}$ (poser $z = y^2$). ■

Exercice 5.14 Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que les deux équations différentielles $y' - y = 1 - x$ et $xy' - y = f(x)$ aient une solution commune sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 5.15 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 et telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

■

Exercice 5.16 (★) Résoudre ces exemples d'équations non linéaires :
(On a besoin d'astuces partout...)

- $y' = y^2$
- $y = y'^2$
- $y' + e^{y-x} = 0$
- $x(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$
- $y' \tan x = \frac{1}{\tan y}$
- $xy' + y - y'^2 = 0$

■

Exercice 5.17 — (Une équation d'ordre 3).
On recherche les solutions (réelles) sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''' = y$$

1. Donner l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(F) \quad y' = y$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F).

3. Quelles sont les solutions g de (F) ? En déduire l'ensemble des solutions de (E), en résolvant une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

■

Quelques équations fonctionnelles

Exercice 5.18 Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)f(y) \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 5.19 Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 5.20 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité fonctionnelle :

$$f(x+y) \geqslant f(xy) \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

■

Exercice 5.21 — (★). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

■