6. Logique et vocabulaire ensembliste

Formules logiques

Exercice 6.1 Reformuler, sous la forme d'une phrase en français et sans introduire de variable, les propositions suivantes (on ne prétend pas qu'elles sont toutes vraies...)

1. $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 \in \mathbb{R}$.
2. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 < 2ab$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. (Théorème des 4 carrés de Lagrange.)

■

Exercice 6.2 Écrire avec quantificateur(s) les énoncés suivants :

1. Tous les entiers naturels sont inférieurs ou égaux à leur carré.
2. Il existe un réel supérieur à son carré.
3. L'equation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.
4. Il existe un entier relatif plus petit que tout réel.
5. Tout réel est supérieur à au moins un entier relatif.
6. Tout entier pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers [a].

■

a. Cet énoncé est connu sous le nom de **conjecture de Goldbach**, on ne sait pas s'il est vrai.

Exercice 6.3 On a une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateur les énoncés suivants, puis leur négation.

1. La fonction f est la fonction nulle sur I.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
3. La fonction f est croissante sur I.
4. La fonction f s'annule sur I.
5. La fonction f est monotone sur I.
6. La fonction f n'est pas monotone sur I.

■

Exercice 6.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'implication (n premier et $n \neq 2$) $\Rightarrow$ n impair.
Énoncer la contraposée, la réciproque, et la contraposée de la réciproque, de cette implication. ■

Exercice 6.5 Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions portant sur les éléments d'un ensemble E. Mettre, dans chacun des cas suivants, le connecteur logique adéquat, parmi $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, entre les formules logiques proposées.

1. $\forall x \in E,\ (P(x)$ **et** $Q(x))$ .... $\big(\forall x \in E, P(x)\big)$ **et** $\big(\forall x \in E, Q(x)\big)$
2. $\forall x \in E,\ (P(x)$ **ou** $Q(x))$ .... $\big(\forall x \in E, P(x)\big)$ **ou** $\big(\forall x \in E, Q(x)\big)$
3. $\exists x \in E,\ (P(x)$ **et** $Q(x))$ .... $\big(\exists x \in E, P(x)\big)$ **et** $\big(\exists x \in E, Q(x)\big)$
4. $\exists x \in E,\ (P(x)$ **ou** $Q(x))$ .... $\big(\exists x \in E, P(x)\big)$ **ou** $\big(\exists x \in E, Q(x)\big)$

■

Techniques de démonstration

Exercice 6.6 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'implication $\big(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant 2\varepsilon\big) \Rightarrow a = 0$.

1. Énoncer la contraposée de cette implication.
2. Ces implications sont-elle vraies ?

■

Exercice 6.7 Résoudre les équations suivantes. *[On pourra procéder par analyse/synthèse.]*

1. $\sqrt{4x-3} = x$
2. $\sqrt{x+6} = x$
3. $\sqrt{x+3} = x+1$
4. $|3x+1| \leqslant |2x-1|$
5. $|x+1| + |x| = 1$
6. $|2x+1| = 2x-1$

■

Exercice 6.8 Démontrer que pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3. ■

Exercice 6.9 Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrer que 5 divise $x-1 \Rightarrow$ 5 divise $(x+1)^2+1$. ■

Exercice 6.10 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x^2 = 4x-2 \Rightarrow x \geqslant 0$. ■

Exercice 6.11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+1$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si f ne change pas de signe alors $a = 0$. ■

Exercice 6.12 Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$. ■

Exercice 6.13 On note $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$.
Calculer $x^{\sqrt{2}}$ et en déduire qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que $a^b \in \mathbb{Q}$. ■

Exercice 6.14 Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. ■

Exercice 6.15 Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$. ■

Produit cartésien

Exercice 6.16 Calculer l'ensemble $(\{1,2,3\}\times\{1,2\})\setminus(\{1,2\}\times\{1,2,3\})$. ■

Exercice 6.17 Soient A, B et C trois ensembles.

1. Comparer les ensembles $(A\times C)\cap(B\times C)$ et $(A\cap B)\times C$.
2. Comparer les ensembles $(A\times C)\cup(B\times C)$ et $(A\cup B)\times C$.

■

Parties d'un ensemble

Exercice 6.18 Déterminer $\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))\setminus\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))\big)$. ■

Exercice 6.19 Soient A et B deux ensembles.

1. Comparer les ensembles $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(A\cap B)$.
2. Comparer les ensembles $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(A\cup B)$.

■

Exercice 6.20 Soient E un ensemble et A, $B\subset E$.

1. Résoudre l'équation $A\cap X=B$ d'inconnue $X\in\mathscr{P}(E)$.
2. Résoudre l'équation $A\cup X=B$ d'inconnue $X\in\mathscr{P}(E)$.

■

Exercice 6.21 Soient E un ensemble et A, B et $C\subset E$.

1. Justifier que $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.
2. En déduire, en utilisant les lois de De Morgan et les propriétés des opérations $\cap$ et $\cup$, que

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\text{ et }A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

■

Exercice 6.22 Soit E un ensemble. Montrer par raisonnement direct et par contraposée les assertions suivantes :

1. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $(A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B$
2. $\forall (A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$, $(A \cap B = A \cap C$ **et** $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C$

■

Exercice 6.23 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Exprimer $A \setminus (B \setminus C)$ en fonction de $A \setminus B$ et $A \cap C$. ■

Exercice 6.24 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Montrer que $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$ et que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. ■

Exercice 6.25 — Différence symétrique. Soit E un ensemble. Pour tous A, $B \subset E$, on définit la **différence symétrique** de A et B, notée $A \triangle B$, par $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Exprimer $A \triangle B$ à l'aide des parties A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, et des opérations $\cap$ et $\cup$ uniquement.
2. Déterminer, pour tout $A \subset E$, les parties $A \triangle A$, $\varnothing \triangle A$, $E \triangle A$, $A \triangle \overline{A}$.
3. Montrer que $\cap$ se distribue sur $\triangle$. Est-ce le cas de $\cup$?
4. Montrer que l'opération $\triangle$ est commutative et associative.

■

Divers

Exercice 6.26 Soit E un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles. On dit que E est transitif si $\forall x \in E$, $x \subset E$.

1. Quels sont les ensembles transitifs parmi $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ et $\{\{\varnothing\}\}$?
2. Montrer que si E est transitif, alors $\mathscr{P}(E)$ aussi.
3. Montrer que si E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ aussi.

■

Exercice 6.27 (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n+1$ réels dans $[0;1]$, notés x_1, ..., x_{n+1}. Montrer qu'il existe deux indices distincts i et j entre 1 et $n+1$ tels que $|\, x_i - x_j \,| \leqslant \dfrac{1}{n}$. ■

Exercice 6.28 (★) Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.
[D'après le Rallye mathématique d'Alsace 2012, pour les classes de Terminale] ■