# 7. Relations et applications

## Démonstrations par récurrence

**Exercice 7.1** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)3^n$. ∎

**Exercice 7.2** On considère la suite de Fibonacci, i.e. la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+p} = u_p u_{n+1} + u_{p-1}u_n$.
2. En déduire que pour tous $n$, $m \in \mathbb{N}$, $n$ divise $m \Rightarrow u_n$ divise $u_m$.

∎

**Exercice 7.3** On pose $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$. Conjecturer une formule pour la dérivée $n$-ième $f^(n)(x)$ puis la montrer par récurrence. ∎

**Exercice 7.4** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 \in [1;4]$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 15}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0;5]$. ∎

**Exercice 7.5 — Nombres de Catalan.** On pose $C_0 = 1$ et $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Montrer par récurrence simple que $C_n \geqslant 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence forte que $C_n \geqslant 3^{n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

∎

**Exercice 7.6 — (★) Variantes de récurrences.** Parmi les hypothèses suivantes, lesquelles permettent d'en déduire que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n$ ?

1. $P(0)$ est vrai et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow (P(2n)$ ET $P(2n+1))$.
2. $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais et, pour tout $n \geqslant 1$, $P(n) \Rightarrow (P(2n)$ ET $P(2n+1))$.
3. $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vrais et, pour tout $n \geqslant 2$, $P(n) \Rightarrow (P(2n)$ ET $P(2n+1))$.
4. $P(1)$ est vrai et, pour tout $n \geqslant 1$, $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(2n)$.
5. $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais et, pour tout $n \geqslant 1$, $P(2n) \Rightarrow (P(2n-1)$ ET $P(2n+1))$.

■

## Relations d'ordre

**Exercice 7.7** On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la relation, notée $\preccurlyeq$, définie par

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \quad (x,y) \preccurlyeq (x',y') \Longleftrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$ et rappeler son nom. Est-ce un ordre partiel ou total ?
2. Relativement à $\preccurlyeq$, le cercle trigonométrique[a] admet-il un maximum ? une borne supérieure ?
3. Mêmes questions avec la relation $\preceq$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \quad (x,y) \preceq (x',y') \Longleftrightarrow x < x' \text{ ou } (\, x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

■

a. C'est-à-dire l'ensemble des couples $(x,y)$ de réels tels que $x^2 + y^2 = 1$.

**Exercice 7.8** Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ deux relations d'ordre total sur un ensemble $E$.

1. On définit la relation $\mathscr{T}$ sur $E$ par $\forall (x,y) \in E^2$, $(x \mathscr{T} y \Leftrightarrow (x \mathscr{R} y \text{ et } x \mathscr{S} y))$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question avec $\mathscr{U}$ définie par $\forall (x,y) \in E^2$, $(x \mathscr{U} y \Leftrightarrow (x \mathscr{R} y \text{ ou } x \mathscr{S} y))$.

■

**Exercice 7.9** Soit $A$ un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur $A$. On dit que $\preccurlyeq$ est un « bon ordre » si toute partie non vide de $A$ possède un plus petit élément.

1. Montrer que si $\preccurlyeq$ est un bon ordre sur $A$ alors c'est un ordre total.
2. Donner deux exemples d'ensembles ordonnés, l'un dont l'ordre est un bon ordre et l'autre dont l'ordre est total mais n'est pas un bon ordre.
3. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. On suppose qu'il existe une bijection $f$ croissante de $\mathbb{N}$ dans $E$ (c'est-à-dire telle que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n \leqslant m \Rightarrow f(n) \preccurlyeq f(m)$).
   Montrer que $\preccurlyeq$ est un bon ordre sur $E$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ munis de l'ordre usuel.

■

**Exercice 7.10** Soit $X$ un ensemble non vide. On munit l'ensemble $E = \mathbb{N}^X$ de la relation $\preccurlyeq$ définie par $f \preccurlyeq g$ si et seulement si $\forall x \in X,\ f(x) \leqslant g(x)$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
2. Comparer les énoncés « $f$ est une fonction majorée » et « $\{f\}$ est une partie majorée ».
3. Soit $F$ une partie de $E$.
   a. Montrer que l'ensemble $G$ des minorants de $F$ pour $\preccurlyeq$ est non vide.
   b. Montrer que $G$ possède un plus grand élément.

■

**Exercice 7.11** On pose $X = \left\{(-1)^n \dfrac{n}{n+1}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Déterminer $\inf X$ et $\sup X$.
Est-ce que $X$ possède un minimum ou un maximum ? ■

**Exercice 7.12** Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x\ ;\ x \in A\}$.
Montrer que $-A$ admet une borne inférieure et que $\inf(-A) = -\sup A$. ■

**Exercice 7.13** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A+B = \{a+b\ ;\ (a,b) \in A \times B\}$.
Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure qu'on exprimera en fonction de $\sup A$ et $\sup B$. ■

**Exercice 7.14** Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec la structure de corps, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3, \left\{ \begin{array}{ccc} x \preccurlyeq y & \Rightarrow & x+z \preccurlyeq y+z \\ (x \preccurlyeq y \text{ ET } 0 \preccurlyeq z) & \Rightarrow & xz \preccurlyeq yz \end{array} \right.$$

■

## Relations d'équivalence

**Exercice 7.15 — Germes de fonctions.** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour deux éléments $f$ et $g$ de $E$, on pose $f \mathscr{R} g$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in [-\varepsilon ; \varepsilon],\ f(x) = g(x)$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. ■

**Exercice 7.16** Soit $E$ un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$ une partie de $E$.
On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par :

$$\forall B, C \in \mathscr{P}(E),\ B\mathscr{R}C \Leftrightarrow B\Delta C \subset A$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2. Soit $B \subset E$. Montrer que $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(B) = \{\ (B \setminus A) \cup K\ ;\ K \in \mathscr{P}(A)\ \}$.

■

**Exercice 7.17** Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application fixée.

1. Montrer que la relation « avoir la même image par $f$ », i.e. la relation $\mathscr{I}_f$ sur $E$ définie par $x\,\mathscr{I}_f\,y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur $E$.
2. Déterminer les classes d'équivalences de cette relation lorsque :
   a. $f = \cos$.
   b. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - x$.

■

**Exercice 7.18** Déterminer les propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité) des relations suivantes. Si certaines d'entre elles sont des relations d'équivalence, déterminer les classes d'équivalences associées.

1. Relation $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $m\mathscr{P}n \Longleftrightarrow m - n$ est pair.
2. Relation $\mathscr{Q}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y)\mathscr{Q}(x',y') \Longleftrightarrow x \leqslant x'$ et $y \geqslant y'$.
3. Soit $E$ un ensemble fini.
   a. Relation $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$, définie par $A\mathscr{R}B \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
   b. Relation $\mathscr{S}$ sur $E^E$, définie par $f_1\mathscr{S}f_2$ ssi il existe une bijection $g : E \to E$ telle que $f_2 = g \circ f_1$.

■

## Divers sur les relations

**Exercice 7.19** Soit $E$ un ensemble. On considère les relations $\simeq$ et $\hookrightarrow$ définies sur $\mathscr{P}(E)$ par $A \simeq B$ si et seulement s'il existe une bijection de $A$ dans $B$, et $A \hookrightarrow B$ si et seulement s'il existe une injection de $A$ dans $B$.

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence [a].
2. La relation $\hookrightarrow$ est-elle une relation d'ordre ?

■

a. Appelée la relation d'équipotence

**Exercice 7.20 — (★) Comparaison de relations.** Soit $E$ un ensemble. On appelle $\mathfrak{R}$ l'ensemble des relations sur $E$. Pour $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ deux relations sur $E$, on dit que $\mathscr{A}$ est *plus fine* que $\mathscr{B}$ si on a

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathscr{A}y \Rightarrow x\mathscr{B}y$$

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est plus fine que $\mathscr{B}$ si et seulement si le graphe de $\mathscr{A}$ est inclus dans le graphe de $\mathscr{B}$.
2. Montrer que la relation « être plus fine que » est une relation d'ordre sur $\mathfrak{R}$.
3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des relations d'équivalences sur $E$. Montrer que $\mathscr{E}$ a un minimum et un maximum pour la relation « être plus fine que ».
   Quelle est la plus fine des relations d'équivalences ? Et la moins fine ?
4. Soit $\mathscr{O}$ l'ensemble des relations d'ordre sur $E$. Montrer que $\mathscr{O}$ a un minimum et des éléments maximaux pour la relation « être plus fine que », que l'on précisera.

■

**Exercice 7.21 — Un peu de dénombrement.** Pour chacun des ensembles $E$ ci dessous, dire combien il existe de relations sur $E$ et, parmi celles-ci, combien sont des relations d'équivalence, combien sont des relations d'ordre et combien sont des relations d'ordre totales.

1. $E = \varnothing$
2. $E = \{0\}$
3. $E = \{0,1\}$
4. $E = \{0,1,2\}$

■

## Applications

**Exercice 7.22** Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Que dire des assertions suivantes ?

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
4. $\exists x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.
5. $\forall y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
8. $\exists y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

■

**Exercice 7.23** Soit $E$ un ensemble et $f$ une application de $E$ dans lui même. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si elle est surjective. ■

**Exercice 7.24** Soient $E$ et $F$ deux ensembles, et soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$. Montrer les équivalences :

1. $f$ est injective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. $f$ est surjective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
3. $f$ est bijective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E),\ \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

■

**Exercice 7.25** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes. Déterminer leur image et, le cas échéant, leur bijection réciproque.

1. Applications numériques.
   a. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+2}{x-1}$.
   b. $\mathrm{sh} \circ \mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   c. $g : \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z^2}{2z-1}$.
   d. $\cos \circ \sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$.
2. Applications sur des $n$-uplets.
   a. $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (a+b, a-b)$.
   b. $k_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (a,b) \mapsto (a+b, ab)$.
   c. $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (a,b) \mapsto (1, a+b, a)$.
   d. $k_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ (a,b) \mapsto (a+b, ab)$.
3. Applications sur les parties d'un ensemble. Soient $E$ un ensemble fini non vide et $A \subset E$.
   a. $i : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E),\ X \mapsto A \cap X$.
   b. $j : \mathscr{P}(E)^2 \to \mathscr{P}(E),\ (X,Y) \mapsto X \setminus Y$.
4. Applications sur des ensembles de fonctions.
   a. $\varphi_1 : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},[-1;1]),\ f \mapsto \sin \circ f$.
   b. $\varphi_2 : \mathscr{F}([-1;1],\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f \circ \sin$.

■

**Exercice 7.26** On considère les deux applications $f$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f$, $g$, $f \circ g$ et $g \circ f$. ■

**Exercice 7.27** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(E,G)$. On définit l'application $h \in \mathscr{F}(E, F \times G)$ par $h(x) = (f(x), g(x))$, pour tout $x \in E$.

1. Montrer que si $f$ ou $g$ est injective, alors $h$ est injective.
2. On suppose $f$ et $g$ surjectives. L'application $h$ est-elle alors nécessairement surjective ?

■

**Exercice 7.28** Soient $E$ un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On considère l'application

$$f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B),\ X \longmapsto (X \cap A, X \cap B).$$

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. Lorsque $f$ est bijective, déterminer $f^{-1}$.

■

**Exercice 7.29** Soient $E$ un ensemble non vide, $A$ une partie de $E$ et $\Phi_A$ l'application de $\mathscr{P}(E)$ dans lui même qui à toute partie $X$ de $E$ associe $\Phi_A(X) = X \cap A$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Phi_A$ est injective.

(ii) $\Phi_A$ est surjective.

(iii) $A = E$.

■

**Exercice 7.30** Soient $f$, $g$ et $h$ trois applications de $E$ dans $E$.

Montrer que si parmi les trois applications $g \circ f$, $h \circ g$ et $f \circ g$ il y en a deux bijectives, alors $f$, $g$ et $h$ sont toutes bijectives. ■

**Exercice 7.31** Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, on pose $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

Montrer que $f$ réalise une bijection de $x \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ dans $[-1;1]$ et déterminer sa bijection réciproque. ■

**Exercice 7.32** Montrer que les applications $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ suivantes sont bijectives :

1. $(p,q) \mapsto 2^p(2q+1) - 1$
2. $(p,q) \mapsto \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$

■