8. Structures algébriques

Lois de composition internes

Exercice 8.1 Pous tous réels x et y, on pose $x \star y = x + y + xy^2$.

1. La loi $\star$ est-elle associative ? commutative ?
2. Montrer que $\star$ admet un élément neutre.
3. Montrer qu'aucun élément de $\mathbb{R}^*$ n'admet d'inverse pour $\star$.
4. Résoudre l'équation $x \star x = 3$.

Exercice 8.2 On munit l'ensemble $\mathbb{Q}^2$ d'une loi $\otimes$ définie par $(x,y) \otimes (x',y') = (xx', yx' + y')$ pour tous couples (x,y) et $(x',y') \in \mathbb{Q}^2$.

1. La loi $\otimes$ est-elle commutative ?
2. Montrer que $\otimes$ est associative et admet un élément neutre.
3. Étudier l'existence de symétriques.

Exercice 8.3 Soient $(E,\times)$, $(F,*)$ et $(G,\vee)$ trois magmas. Soient f un morphisme de $(E,\times)$ dans $(F,*)$ et g un morphisme de $(F,*)$ dans $(G,\vee)$.

1. Montrer que $g \circ f$ est un morphisme de $(E,\times)$ dans $(G,\vee)$.
2. On suppose que f est bijective. Montrer que f^{-1} est un morphisme de $(F,*)$ dans $(E,\times)$.

Exercice 8.4 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des morphismes ?

1. $\ln \,:\, (\mathbb{R}_+^*, \times) \to (\mathbb{R}, +),\; x \mapsto \ln x$.
2. $\exp \,:\, (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times),\; x \mapsto e^x$.
3. $|\cdot| \,:\, (\mathbb{C}, \times) \to (\mathbb{R}, \times),\; z \mapsto |z|$.
4. $\varphi_n \,:\, (\mathbb{C}, \times) \to (\mathbb{C}, \times),\; z \mapsto z^n$.
5. $\psi \,:\, (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^2, +),\; (x,y,z) \mapsto (x+2y, x+y-3z)$.

■

Structure de groupe

Exercice 8.5 Pour toute application $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $E_f = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\, f(x+T) = f(x)\}$.
Les éléments de E_f sont appelés les périodes de f.

1. Déterminer $E_{\cos}$ et $E_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}}$.
2. Montrer E_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Vérifier que $E_f \neq \{0\}$ si et seulement si f est périodique. Que dire de f si $E_f = \mathbb{R}$?
4. On considère l'application $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Déterminer $E_{\chi_{\mathbb{Q}}}$. Est ce que $\chi_{\mathbb{Q}}$ admet une plus petite période strictement positive ?

■

Exercice 8.6 Soit n un entier naturel impair. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Montrer que φ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

■

Exercice 8.7 *(Quelques propriétés des morphismes de groupe)*
Soit f un morphisme du groupe $(G, \times)$ dans le groupe $(H, *)$.

1. Montrer que $f(e_G) = e_H$, où e_G et e_H désignent les neutres respectifs de G et H.
2. Montrer que $\forall x \in G,\, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

■

Exercice 8.8 Soit $(E,\top)$ un groupe, F un ensemble et $\perp$ une loi sur F.

Soit f une bijection de E dans F telle que $\forall(x,y)\in E^2$, $f(x\top y)=f(x)\perp f(y)$.

1. Montrer que $(F,\perp)$ est un groupe. Quel est son neutre ?
2. Montrer que si $(E,\top)$ est abélien, alors $(F,\perp)$ aussi.

■

Exercice 8.9 Soit $(G,\cdot)$ un groupe (pas nécessairement abélien) de neutre e, et a et b deux éléments de G.

1. Montrer que si $ab=b^2a$ et $b^5=e$, alors $ab^3=ba$ et $a^2b^2=b^3a^2$.
2. Montrer que si $a^5=e$ et $ab=ba^3$ alors $a^2b=ba$ et $ab^3=b^3a^2$.

■

Exercice 8.10

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est un sous groupe de $\mathbb{U}$.
2. On note $\hat{\mathbb{U}}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$. Montrer que $\hat{\mathbb{U}}$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$.
3. Donner un élément de $\mathbb{U}$ qui n'est pas dans $\hat{\mathbb{U}}$.

■

Exercice 8.11 Soit $(E,\top)$ un ensemble muni d'une loi de composition associative et admettant un élément neutre e. On note $U(E)$ l'ensemble des éléments de E inversibles pour $\top$.

1. Montrer que $(U(E),\top)$ est un groupe.
2. Déterminer $U(E)$ lorsque $(E,\top)=(\mathbb{R},\times)$, puis $(\mathscr{P}(X),\cap)$ et $(\mathbb{Z},\times)$.

■

Exercice 8.12 Soit $(G,*)$ un groupe, et H un sous groupe de G.

On considère la relation $\mathscr{R}_H$ définie sur G par :

$$\forall(x,y)\in G^2,\ x\mathscr{R}_H y\Leftrightarrow x*y^{-1}\in H$$

Montrer que $\mathscr{R}_H$ est une relation d'équivalence sur G. ■

Anneaux et corps

Exercice 8.13 $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\circ)$ est-il un anneau ?

Exercice 8.14 Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau et $a,b \in A$.

On suppose que $ab+ba = 1_A$ et $a^2b+ba^2 = a$.

1. Montrer que $a^2b = ba^2$ puis que $2aba = a$.
2. En déduire que $ab = ba$ puis que a est inversible et vérifie $a^{-1} = 2b$.

Exercice 8.15 On munit $A = \mathbb{R}^2$ deux lois suivantes :

$$\forall((a,b),(a',b')) \in A^2,\ (a,b) +_A (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$\forall((a,b),(a',b')) \in A^2,\ (a,b) \times_A (a',b') = (aa', bb')$$

1. Montrer que $(A,+_A,\times_A)$ est un anneau commutatif. Que vaut le neutre 0_A pour $+_A$?
2. Déterminer les diviseurs de zéro dans cet anneau, c'est à dire les éléments $x \in A\setminus\{0_A\}$ pour lesquels il existe $y \in A\setminus\{0_A\}$ vérifiant $x \times_A y = 0_A$.

Exercice 8.16 Soient $(A,+,\cdot)$ un anneau.

1. Montrer que si $0_A \neq 1_A$, alors 0_A n'est pas inversible.
2. Montrer que si $0_A = 1_A$, alors $A = \{0_A\}$.

Exercice 8.17 Montrer que $A = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, muni de l'addition et de la multiplication réelles, est un corps.

Est-ce le cas de $B = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$? Et de $C = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$?

Exercice 8.18 Soit E un ensemble quelconque.

1. Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau commutatif.
3. Est-ce que $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cup)$ est un anneau ?

■

Encore de l'entraînement au calcul de sommes et produits

Exercice 8.19 Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda+a_k)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k^p=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=k\sum_{k=1}^{n}a_k$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda+a_k)=\lambda^n+\prod_{k=1}^{n}a_k$
9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k$
10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda\prod_{k=1}^{n}a_k$
11. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k\prod_{k=1}^{n}b_k$
12. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_k^p=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p$
13. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}a_{i,j}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}a_{i,j}$
14. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(ka_k)=n!\prod_{k=1}^{n}a_k$

■

Exercice 8.20 Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\times k!$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

■

Exercice 8.21 Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^3-1} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4n-1} \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor$

■

Exercice 8.22 Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k^2+3k+1)$

■

Exercice 8.23 On pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{2018} k!$.

1. Déterminer le chiffre des unités de A.
2. Déterminer les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de A.

■

Exercice 8.24 Soient $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ des n-uplets de nombres réels ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Développer la somme double $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$.
2. En déduire l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

■

Exercice 8.25 — (Déjà vu mais important).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a et b deux réels. Calculer les deux sommes

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(ak+b) \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{n} \sin(ak+b)$$

■

Pour aller plus loin

Exercice 8.26 — (★). Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$. On souhaite montrer que G vérifie l'une des deux propriétés :

$$G \text{ est dense dans } \mathbb{R}$$
$$\text{ou}$$
$$\text{Il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } G = a\mathbb{Z}.$$

1. Que dire si $G = \{0\}$?
   On suppose à partir de maintenant que $G \neq \{0\}$.
2. Montrer que G contient au moins un réel strictement positif.
3. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure.
   On notera $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.
4. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   a) Montrer que si $a \notin G$ alors il existe x et y dans G tels que $a < y < x < 2a$.
   (Penser à la caractérisation de la borne inférieure.)
   b) En déduire qu'on a $a \in G$.
   c) Montrer que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   d) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $an \leqslant x < an + a$.
   e) En déduire que $G \subset a\mathbb{Z}$ et conclure.
5. Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
   Soient x et y deux réels tels que $x < y$.
   a) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$.
   b) Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ng \leqslant x < ng + g$.
   c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

■

Exercice 8.27 — (★) Application.
Cet exercice utilise le résultat de l'exercice précédent. On pose :

$$G = \{n + 2\pi m \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que G ne peut pas être de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   (On peut se servir librement de l'irrationnalité du nombre π.)
   Que peut-on alors dire de G ?
3. En déduire qu'il existe un entier n tel que le développement décimal de $\cos n$ commence par :

$$\cos n = 0{,}20182019\ldots$$

■