9. Dénombrements — Arithmétique

Dénombrements

Exercice 9.1 On tire 5 atouts dans un jeu de tarot. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Au moins un atout est multiple de 5.
2. Il y a exactement un multiple de 5 et un multiple de 3.
3. On a tiré le 1 ou le 21.

■

Exercice 9.2 Une urne contient six boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Aucune condition.
2. Au moins une boule est blanche.
3. Au plus une boule est noire.
4. On a tiré, dans cet ordre, deux blanches et deux noires.
5. On a tiré, dans un ordre quelconque, deux blanches et deux noires.

■

Exercice 9.3 Combien y a-t-il d'anagrammes de :

1. MAISON ?
2. RADAR ?
3. MISSISSIPPI ?
4. ABRACADABRA ?

■

Exercice 9.4 On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages vérifiant les conditions suivantes ?

1. Aucune condition.
2. Il y a au moins un pique parmi les cinq cartes.
3. Il y a exactement deux valets.
4. Il y a un as et deux carreaux.
5. Il n'y a pas de carte en dessous de 9.
6. Les cinq cartes forment deux paires (mais pas de brelan).
7. Les cinq cartes sont de la même couleur.
8. Les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur).

■

Exercice 9.5 L'ensemble X a n élements. On cherche à calculer le nombre de couples (A,B) de parties de X telles que $A \cup B = X$.

1. Combien y a-t-il de parties A à k éléments ? Une telle partie A étant donnée, combien y a-t-il de B qui conviennent ?
2. En déduire la solution du problème.

■

Exercice 9.6 Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer :

1. le nombre de relations binaires sur E,
2. le nombre de relations binaires réflexives sur E,
3. le nombre de relations binaires symétriques sur E.
   [Établir une bijection entre l'ensemble des relations binaires symétriques et l'ensemble des parties de l'ensemble $E \cup \mathscr{P}_2(E)$, en notant $\mathscr{P}_2(E)$ l'ensemble des paires d'éléments de E.]

■

Exercice 9.7 Soit n un entier strictement positif et $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

1. Trouver le nombre de couples (x,y) de E^2 tels que $x > y$.
2. Trouver le nombre de couples (x,y) de E^2 tels que $x = y$.
3. Trouver le nombre de triplets (x,y,z) de E^3 tels que $x < y < z$.

■

Formule du binôme et coefficients binomiaux

Exercice 9.8 Soient n, $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant p$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. ■

Exercice 9.9 Développer et simplifier :

1. $(2-x)^5$
2. $(x-1)^8$
3. $(x+1)^6+(x-1)^6$
4. $(1+\sqrt{2})^4$

■

Encore des sommes et produits...

Exercice 9.10 Simplifier les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{3^k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$

■

Exercice 9.11 En développant de deux façons $(1+t)^{2n}$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

■

Exercice 9.12 Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=0}^{n} 3$
2. $\prod_{k=1}^{n} (2k)$
3. $\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
4. $\prod_{k=0}^{n} q^k$
5. $\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$
6. $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$

■

Exercice 9.13 Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on ait :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

■

Exercice 9.14 On pose $S_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$.

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant n!$.
3. ($\bigstar$) Justifier que S_n est le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n.
   [Étant donnés un ensemble E de cardinal $n+1$, un élément a de E et $k \in [\![0;n]\!]$, commencer par compter le nombre de parties de cardinal $k+1$ contenant a, puis pour toute telle partie X, le nombre de partitions de E contenant X.]

■

Un peu d'algèbre en passant...

Exercice 9.15 Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif. Les neutres sont notés 0 et 1.
On dit qu'un élément x de A est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer qu'un élément nilpotent ne peut pas être inversible.
2. Montrer que si x est nilpotent et $y \in A$, alors $x \cdot y$ est nilpotent.
3. Montrer que si x et y sont nilpotents, alors $x+y$ est nilpotent. *(Utiliser la formule du binôme)*
4. Montrer que si x est nilpotent, alors $1-x$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$, où n vérifie $x^n = 0$.

■

Arithmétique

Nombres premiers

Exercice 9.16 Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'aucun des entiers entre $n!+2$ et $n!+n$ n'est premier.
2. Donner une suite de 10^n entiers naturels consécutifs ne comportant aucun nombre premier.

■

Exercice 9.17 Les nombres 1, 11, 111, 1111, 11111 et 111111 sont-ils premiers ? ■

Exercice 9.18 — Nombres de Mersenne. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier. Étudier la réciproque.
   [Penser à l'identité remarquable $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$.]
2. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est **parfait**, i.e. est la somme de ses diviseurs stricts (un diviseur strict d'un entier n est un diviseur de n distinct de n).

■

Décomposition en produit de facteurs premiers

Exercice 9.19

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les valuations $v_p(n)$, où $p \in \mathbb{P}$, pour que n soit un carré.
2. Les entiers 46656, 63504 et 74088 sont-ils des carrés ?

■

Exercice 9.20 Déterminer le nombre et la somme des diviseurs positifs de 5544. ■

Exercice 9.21 — (★).

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Montrer que $v_p(n!) = m + v_p(m!)$, où $m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.
   [Remarquer que $v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + \cdots + v_p(n)$ et que $v_p(k) = 0$ si p ne divise pas k.]
2. Démontrer la formule $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
3. Application : Déterminer $v_2(2018!)$ puis $v_5(2018!)$.
   En déduire que l'écriture décimale de 2018! se termine par exactement 502 zéros.

■

Division euclidienne

Exercice 9.22 Soit a un entier dont le reste dans la division euclidienne par 12 est 7.

1. Quel est le reste dans la division euclidienne de a par 3 ?
2. Quel peut être le reste dans la division euclidienne de a par 15 ?

■

Exercice 9.23 — Critères de divisibilité.

1. a. Calculer le reste de la division euclidienne de 10^n par 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. En déduire le critère de divisibilité par 3 bien connu.
2. Même question en remplaçant 3 par 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 11.

■

Congruences

Exercice 9.24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la relation de congruence modulo n est compatible avec les opérations $+$ et $\times$, i.e. que pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$, alors $a+c \equiv b+d\,[n]$ et $ac \equiv bd\,[n]$.
2. *Applications.* En utilisant les résultats précédents avec un entier n bien choisi :
   a. Déterminer le chiffre des unités de l'entier 2019^{2018}.
   b. Montrer que le nombre $3333^{4444} + 4444^{3333}$ est divisible par 5.

■

Exercice 9.25 — (★★) Des anneaux remarquables.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que la relation $\cdot \equiv \cdot\ [n]$ de congruence modulo n est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\cdot\equiv\cdot\ [n]$ sera noté plus simplement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On notera aussi $\overline{k}$ la classe d'un entier k.

1. a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $r \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $k \equiv r[n]$.
   b. En déduire que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\right\}$. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
2. Pour $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $a = \overline{p}$ et $b = \overline{q}$, on pose $a \mathbin{\overline{+}} b = \overline{p+q}$ et $a \mathbin{\overline{\times}} b = \overline{pq}$.
   a. Montrer que les deux lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont correctement définies.
   b. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$ est un anneau abélien.
   c. Dresser les tables d'addition et de multiplication des anneaux $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
3. a. On suppose que n est un entier composé.
   Montrer qu'alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient des diviseurs de zéro.
   b. On suppose que n est un nombre premier.
   Montrer qu'alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre, puis que c'est un corps.

■

Un problème de dénombrement complet (découpé en trois exercices)

Exercice 9.26 — Les nombres de Catalan.

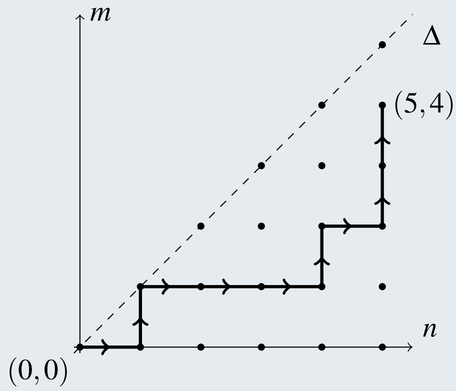
On note $\Delta = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leqslant m \leqslant n\}$ l'ensemble des points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui sont « sous la diagonale ».

On s'intéresse aux chemins joignant des points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, formés de déplacements successifs.

Les seuls déplacements autorisés sont :
— Le passage de (n,m) à $(n+1,m)$: vers la droite
— Le passage de (n,m) à $(n,m+1)$: vers le haut

Enfin, tous les points d'un chemin doivent rester dans Δ.

On donne sur la figure de droite un exemple de chemin qui relie $(0,0)$ à $(5,4)$.



On note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins qui relient $(0,0)$ à (n,m).
On note aussi $C_n = \delta_{n,n}$: c'est le n-ième *nombre de Catalan*.

1. Indiquer rapidement la valeur de $\delta_{n,0}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et que $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ (pour $1 \leqslant m < n$).
3. En déduire la valeur de $\delta_{n,1}$ pour $n \geqslant 1$ et de $\delta_{n,2}$ pour $n \geqslant 2$.
4. Donner les valeurs des $\delta_{n,m}$ pour tous les couples (n,m) tels que $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 5$. On pourra présenter ces valeurs dans un tableau triangulaire qu'on remplira sans démonstration à l'aide des questions précédentes.
5. Montrer que pour $0 \leqslant m \leqslant n$, on a $\delta_{n,m} = \dfrac{n-m+1}{n+1}\dbinom{n+m}{n}$. En déduire $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Exercice 9.27 — (★) Quelques propriétés des nombres de Catalan.

1. Montrer qu'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouver les égalités $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1}$.
3. Montrer que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
4. Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.
5. On cherche dans cette question un encadrement de C_n.
   a. Montrer que $4\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{3/2} \leqslant \dfrac{C_k}{C_{k-1}} \leqslant 4\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{3/2}$ pour tout $k \geqslant 1$.
   b. En déduire que $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leqslant C_n \leqslant 3\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 9.28 — (★★) D'autres problèmes de dénombrement.

Les nombres de Catalan apparaissent dans de nombreuses autres situations.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacune des questions suivantes, démontrer que le nombre indiqué est C_n :

1. Le nombre de $(n-1)$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ d'entiers naturels, qui sont écrits dans l'ordre croissant ($x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1}$) et tels que $x_k \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$.
Indication : Regarder le chemin parcourant les (k, x_k).

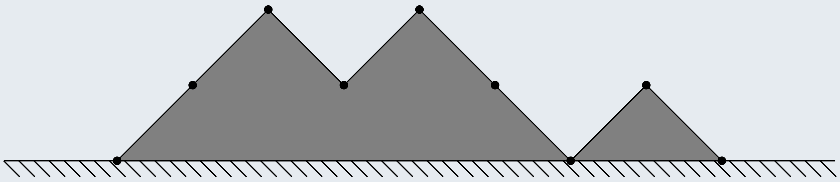
2. Le nombre de $(2n)$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ vérifiant :

— Leur somme totale est nulle : $\sum_{k=1}^{2n} x_k = 0$

— Pour tout m entre 0 et $2n$, la somme des m premiers est positive : $\sum_{k=1}^{m} x_k \geqslant 0$.

Indication : Associer à chacun de ces $(2n)$-uplets un chemin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. Le nombre de « chaînes de montagnes » avec n montées et n descentes (qui ne descendent jamais sous l'horizon). Un exemple pour $n = 4$:

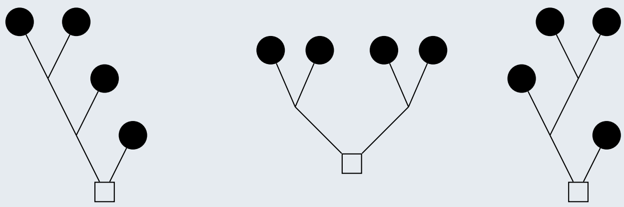


4. Le nombre de façons d'écrire n parenthèses gauches et n parenthèses droites de sorte que le mot obtenu soit bien parenthésé.
Par exemple, pour $n = 3$, les 5 possibilités sont `((()))`, `(()())`, `(())()`, `()(())` et `()()()`.

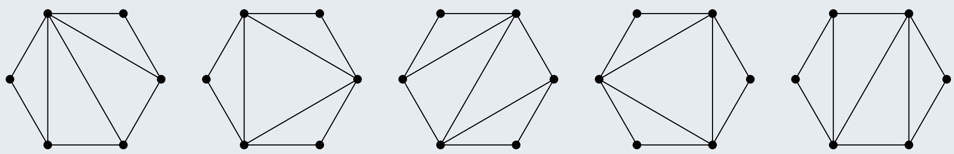
5. Le nombre d'arbres à $n+1$ feuilles, si l'on convient que :

— À la base d'un arbre se trouve un « nœud racine ».
— Chaque nœud possède une branche gauche et une branche droite.
— Chaque branche mène à un nœud ou à une feuille.

Voici trois exemples d'arbres à 4 feuilles :



6. Le nombre de façon de relier les sommets d'un polygone régulier à $n+2$ sommets avec $n-1$ cordes de façon à le découper en triangles.
Voici quelques exemples pour $n = 4$:



■