10. Suites

Convergence, calculs de limites

Exercice 10.1 Déterminer le comportement asymptotique des suites de terme général suivant :

a. $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

b. $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

c. $\sqrt[n]{n^2}$

d. $(\ln n)^{\frac{1}{n}}$

e. $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

f. $\cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n}$

g. $n^{\frac{1}{\ln n}}$

h. $\sqrt[n]{2+(-1)^n}$

i. $0,99\cdots 99$ avec n décimales

j. $\dfrac{\cos n}{n}$

k. $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor nx \rfloor \quad (x \in \mathbb{R}$ fixé)

Exercice 10.2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 10.3 1. Montrer que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire la limite de la suite $\left(\sin\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n \pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10.4 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
On suppose que la suite (v_n) tend vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Peut-on affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$?
2. Même question si on suppose de plus que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 10.5 — Théorème de Cesàro, version suite croissante.
Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose pour tout n :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Établir que $v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que $v_n \to \ell$.

Exercice 10.6 — Théorème de Cesàro, en toute généralité.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. On suppose dans cette question que (u_n) tend vers 0.
   a. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}$ tels que $|v_n| \leqslant \dfrac{A}{n} + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
   b. En déduire que (v_n) tend vers 0.
2. a. Montrer plus généralement que si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) tend vers ℓ.
   b. Étudier la réciproque.

Exercice 10.7 Soit (u_n) une suite réelle.

1. En utilisant le résultat sur les moyennes de Cesàro, montrer que si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ tend aussi vers ℓ.
2. On suppose désormais $u_n > 0$ pour tout n.
   a. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers un certain $\ell > 0$, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ tend aussi vers ℓ.
   b. Calculer les limites de $\dbinom{2n}{n}^{1/n}$ et $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n^2+u_nv_n+v_n^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. ■

Exercice 10.9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes dans $[0;1]$ telles que u_nv_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1. ■

Exercice 10.10 — (★). Soit (u_n) une suite à termes positifs qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que cette suite tend vers 0. ■

Exercice 10.11 — (★). Étudier la convergence de $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Suites extraites

Exercice 10.12 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite ne tendant pas vers $+\infty$.

1. La suite (u_n) est-elle nécessairement majorée ?
2. Montrer que (u_n) admet une sous-suite majorée.

■

Exercice 10.13 — Suites d'entiers. Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers.

1. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est stationnaire.
2. Montrer que si (u_n) est positive et ne tend pas vers $+\infty$, alors (u_n) admet une sous-suite bornée.
3. Montrer que si les u_n sont positifs et tous distincts, alors $u_n \to +\infty$.
4. Montrer que si (u_n) est bornée, alors (u_n) admet une sous-suite constante.
5. Application : montrer que si une suite de rationnels (r_n) tend vers un irrationnel $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors les dénominateurs des r_n tendent vers $+\infty$.

■

Exercice 10.14 Soit (u_n) une suite réelle telle que ses trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Montrer que (u_n) est convergente. ■

Exercice 10.15 On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. a. Expliciter sa sous-suite (u_{n^2}).

   b. Montrer que sa sous-suite (u_{n^2+2n}) est convergente et calculer sa limite.
2. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) ? sur ses éventuels maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure ?

■

Suites adjacentes

Exercice 10.16 On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. a. Montrer que ℓ n'est pas rationnel. *[Supposer $\ell = \frac{p}{q}$ et considérer les termes u_q et v_q.]*

   b. Donner une valeur approchée rationnelle de ℓ à 10^{-3} près.

■

Exercice 10.17 — Moyenne arithmético-géométrique. Soient a et $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$.

1. a. Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y, on a $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+y)$.

   b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \leqslant b_n$.
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

[Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.]

■

Exercice 10.18 Montrer la convergence de (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

■

Exercice 10.19 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Calculer $u_{2n+2} - u_{2n}$, $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ puis $u_{2n} - u_{2n+1}$ en fonction de n.
2. Que peut-on en déduire pour les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ? Pour la suite (u_n) ?

■

Suites récurrentes

Exercice 10.20 Donner le terme général et le comportement asymptotique des suites arithmético-géométriques suivantes :

a. La suite réelle (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. La suite complexe (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Exercice 10.21 Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive bornée et (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1}$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (a_n) converge. ■

Exercice 10.22 Soient (x_n) et (y_n) les suites définies par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le but est de déterminer les termes généraux x_n et y_n par deux méthodes différentes.

1. Montrer que la suite complexe $(x_n + iy_n)$ est géométrique, et en déduire x_n et y_n.
2. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire x_n et y_n.

■

Exercice 10.23 Étudier la suite réelle (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence :

a. $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_{n+1} = \frac{u_n + 5}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Exercice 10.24 Expliciter en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_n + n$ pour $n \geqslant 2$. ■

Exercice 10.25 On définit la suites u par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$$

Étudier le comportement asymptotique de cette suite. ■

Exercice 10.26 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite v par $v_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{a^2}{v_n}\right)$$

Étudier le comportement asymptotique de cette suite (On peut commencer par montrer que v est majorée par a puis étudier sa monotonie). ■

Comparaison asymptotique

Exercice 10.27 Déterminer le comportement asymptotique des suites de terme général suivant :

a. $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ où $a \in \mathbb{R}$

b. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

c. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

d. $\dfrac{\ln(1+n^2)}{n}$

e. $n \ln \dfrac{n+1}{n-1}$

f. $\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$

g. $\left(\dfrac{n+6}{n-2}\right)^n$

h. $e^{-n} \operatorname{ch}\left(\sqrt[4]{n^4+1}\right)$ ■

Exercice 10.28 Trouver un équivalent simple des suites de terme général suivant :

a. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

b. $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$

c. $n^{1/n}-1$

d. $\ln(n+1)-\ln(n)$

e. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)$ ■

Exercice 10.29 Montrer que $1!+2!+\cdots+n! \sim n!$. ■

Exercice 10.30 Trouver un équivalent simple des suites de terme général suivant :

a. $\sqrt{n^2+n+1}-n$

b. $\ln \dfrac{2n^2+4n+3}{7n^2+5n+1}$

c. $\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-n$

d. $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

e. $\dfrac{\sin {}^1/_n}{e^{2/n}-1}$

f. $\ln \cos \dfrac{2}{n}$

g. $\ln(n^2+3n+7)$

h. $\dfrac{\ln \frac{n+1}{n}}{e^{1/n}-1}$

i. $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \sin \dfrac{\pi}{n}$ ■

Exercice 10.31 On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : x = -n \ln x$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge puis donner un équivalent simple de $x_n - \ell$, où ℓ est sa limite.

■

Exercice 10.32 On note (u_n) la suite croissante des points fixes positifs de la fonction tangente. Autrement dit, pour tout entier positif n, u_n est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi ; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

1. Montrer que $u_n \sim n\pi$.
2. Justifier que $u_n - n\pi = \arctan(u_n)$. En déduire la limite ℓ de la suite $(u_n - n\pi)$.
3. Donner un équivalent simple de $u_n - n\pi - \ell$.

■

Exercice 10.33 Donner un équivalent simple de

a. $n^2 \left(e^{1/n} - e^{1/(n+1)}\right)$

b. $\sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$

c. $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2+1} - \dfrac{1}{n^4}$

d. $e^{\sqrt[5]{\cos(1/n)}} - \cos \dfrac{7}{n^2}$

e. $\sqrt{n} \tan \dfrac{2}{n}$

f. $(1 + \ln(n+1) - \ln(n))^n$

■

Exercice 10.34 Soient u et v deux suites à termes strictement positifs. On suppose $u_n \sim v_n$.

1. Montrer que si u et v ont une limite commune $\ell \in]0;1[\cup]1;+\infty[\cup \{+\infty\}$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
2. Donner un exemple de u et v équivalentes telles que $\ln u_n$ et $\ln v_n$ ne soient pas équivalents.
3. (★★) Montrer que si 1 n'est pas valeur d'adhérence de u, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

■

Exercice 10.35 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = S_n - 2\sqrt{n}$$

1. Montrer que $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

■

Exercice 10.36 Soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Donner un exemple de suites strictement positives u et v telles que $u_n \to 1$, $v_n \to +\infty$ et $u_n^{v_n} \to \ell$.

Donner ensuite un exemple de suites strictement positives u et v telles que $u_n \to 1$, $v_n \to +\infty$ et $(u_n^{v_n})$ n'a pas de limite. ■

Exercice 10.37 — (★). Pour $n \geqslant 1$ on définit :

$$u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots\sqrt{n}}}}$$

1. Montrer que $u_{n+1}^2 \leqslant 1+\sqrt{2}\,u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. En déduire que la suite u est majorée. Quelle est sa nature ?

■

Exercice 10.38 — (★). Soit (u_n) une suite bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que λ est la seule valeur d'adhérence de (u_n), autrement dit toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers λ ou ne converge pas. Montrer que (u_n) converge vers λ. ■

Exercice 10.39 Soit (u_n) une suite bornée telle que $u_{2n}+2u_n \to 0$. Montrer que u_n tend vers 0.

(On peut utiliser l'exercice précédent.) ■

Exercice 10.40 — (★). Soit k un entier naturel impair et (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On suppose que $u_n+v_n \to 0$ et $u_n^k - v_n^k \to 0$. Que dire de la nature de (u_n) et (v_n) ? ■

Exercice 10.41 — (★). On pose $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$, ... : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et prend une fois la valeur 1, deux fois la valeur 2, trois fois la valeur 3, etc.

Donner un équivalent de u_n. ■

Exercice 10.42 — (★★). Soit (x_n) définie par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$$

Montrer qu'il existe une unique valeur initiale $a \in \mathbb{R}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée à valeurs positives. ■