11. Limites et continuité des fonctions

Limites

Exercice 11.1 Que peut-on dire d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique et admettant une limite en $+\infty$? ■

Exercice 11.2 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
2. $x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$
3. $x \mapsto \dfrac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2}$
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$

■

Exercice 11.3 Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{e^{2x}-1}$
2. $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$
3. $x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}-1}$
4. $x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$
5. $x \mapsto (1+x)^{\ln x}$
6. $x \mapsto |\ln x|^{\ln x}$

■

Exercice 11.4 Déterminer les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $x \mapsto \dfrac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$ en 4.
2. $x \mapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{4x-\pi}$ en $\dfrac{\pi}{4}$.
3. $x \mapsto \dfrac{\sin(3x)}{1-2\cos x}$ en $\dfrac{\pi}{3}$.
4. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+3-x^2}-2}$ en 1.

■

Étude locale - Comparaison locale

Exercice 11.5 Trouver un équivalent simple des expressions suivantes au point indiqué :

1. $\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ en 0.
2. $\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$ en 0.
3. $\ln(\cos x)$ en 0.
4. $\ln(\sin x)$ en 0.
5. $e^x - \sqrt[3]{1+x}$ en 0.
6. $e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ en $+\infty$.
7. $\arccos x$ en 1.

■

Exercice 11.6 Calculer la limite ℓ de $f(x)$ et un équivalent de $f(x)-\ell$ en a pour :

$$f(x) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{1/x} \text{ en } a = 0, \quad f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) \text{ en } a = +\infty.$$

■

Exercice 11.7 Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^I$ et a un point ou une borne de I.

1. Montrer que si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(x)^\lambda \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\lambda$.
2. a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et g pour que $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.

   b. Trouver f et g qui soient équivalentes en un point a et telles que e^f et e^g ne le soient pas.

   c. Trouver f et g qui ne soient pas équivalentes en un point a et telles que e^f et e^g le soient.

■

Continuité

Exercice 11.8 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f+g=\sup(f,g)+\inf(f,g)$ et que $|f-g|=\sup(f,g)-\inf(f,g)$.
2. On suppose que f et g sont continues. Montrer que $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues.
3. Donner un exemple de fonction $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue.

■

Exercice 11.9 Étudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2$. ■

Exercice 11.10 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

1. $x\mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $x\mapsto(1+x)\ln(1+x)$
3. $x\mapsto\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$
4. $x\mapsto\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$
5. $x\mapsto(\tan x)^{\sin x}$
6. $x\mapsto\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$
7. $x\mapsto\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
8. $x\mapsto x^x$

■

Exercice 11.11 Montrer qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule sur une partie dense de $\mathbb{R}$ est identiquement nulle.

Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et égales sur une partie dense de $\mathbb{R}$, alors $f=g$. ■

Exercice 11.12 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé.
   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(nx)=nf(x)$.
   b. Montrer que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=rf(1)$.
2. Montrer que si f est continue en 0, alors f est une homothétie.

■

Exercice 11.13 Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et telle que $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$ pour tous réels x et y. Le but de l'exercice est de montrer que g est affine.
On pose $h(x) = g(x) - g(0) - x(g(1) - g(0))$.

1. Montrer que h est impaire et telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{h(x)+h(y)}{2}$.
2. a. Montrer que $h(0) = h(1) = 0$, et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x+2) = 2h(x+1) - h(x)$.
   b. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $h(k) = 0$.
3. Montrer que h est nulle sur l'ensemble $D = \{k/2^n \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. En déduire que h est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, et conclure.

■

Intervalles, valeurs intermédiaires, bornes atteintes

Exercice 11.14 Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction continue d'un segment dans lui-même. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[a;b]$. ■

Exercice 11.15 — (★). Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction croissante d'un segment dans lui-même. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[a;b]$. ■

Exercice 11.16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe. ■

Exercice 11.17 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et positive. On suppose que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0;1[$$

Montrer que f admet un point fixe dans $\mathbb{R}_+$. ■

Exercice 11.18 — (★). Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Exercice 11.19 Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes. ■

Exercice 11.20 Montrer qu'une fonction continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. ■

Exercice 11.21 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées. ■

Exercice 11.22 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Montrer que l'image d'un intervalle par f est un intervalle.

■

Exercice 11.23 Un cycliste a parcouru 20 km en 1h. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure durant lequel le cycliste a parcouru exactement 10 km. ■

Exercice 11.24 — Théorème du point fixe. Soit une fonction f continue sur un segment $[a;b]$ et à valeurs dans $[a;b]$ (où $a < b \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que f admet un point fixe dans $[a;b]$.
2. On suppose dans cette question que f est **contractante**, i.e. qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que

$$\forall x, y \in [a;b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

   a. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[a;b]$. On le note c.
   b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - c| \leqslant k|u_n - c|$. En déduire que (u_n) converge vers c.

■

Exercice 11.25 — Théorème des cordes. Soient $f \in \mathscr{C}([0;1])$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe $c \in [0; 1 - 1/n]$ tel que le taux d'accroissement de f entre c et $c + 1/n$ est le même que le taux d'accroissement de f entre 0 et 1.

1. Traiter le cas $f(0) = f(1) = 0$.

   [Considérer $g : x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, et calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$.]

2. Traiter le cas général.

■

Exercice 11.26 Soient $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure. ■

Exercice 11.27 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, de limites $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$.
Montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 11.28 Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$, et dont les graphes ne s'intersectent pas.

1. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) \geqslant g(x) + m$, ou que $g(x) \geqslant f(x) + m$, sur $[a;b]$.
2. Montrer que le résultat peut être faux si f et g sont continues sur un intervalle qui n'est pas un segment.

■

Exercice 11.29 Soient λ et μ deux réels strictement positifs.
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in \,]0;1[$ tel que $\lambda f(0) + \mu f(1) = (\lambda + \mu) f(c)$. ■

Divers

Exercice 11.30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 qui vérifie $f(2x) = f(x)$ pour tout réel x. Montrer que f est constante. ■

Exercice 11.31 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 et en 1 qui vérifie $f(x^2) = f(x)$ pour tout réel x. Montrer que f est constante. ■

Exercice 11.32 — (★). Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une application continue.
On définit l'application $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad g(x) = \sup_{t \in [0;x]} f(t)$$

Montrer que g est croissante et continue. ■

Exercice 11.33 — (★). Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue.
On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
On peut commencer par traiter le cas $\ell = 0$. ■

Exercice 11.34 Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une application 1-lipschitzienne.
Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. ■

Exercice 11.35 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f \circ f$ possède un point fixe.
Montrer que f a aussi un point fixe. ■

Exercice 11.36 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f \circ f = f$.
Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.
Donner l'allure du graphe de f. ■

Exercice 11.37 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit $a > 0$. On suppose qu'on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a|x-y|$$

Montrer que f est bijective. ■

Exercice 11.38 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \max_{k \in [\![0;n]\!]} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$? ■

Exercice 11.39 Montrer que la fonction sin est 1-lipschitzienne. ■

Exercice 11.40 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
On suppose que f est k-lipschitzienne et g est k'-lipschitzienne.

1. Montrer que $f + g$ est $(k+k')$-lipschitzienne.
2. Montrer que pour tout réel λ, λf est $|\lambda| k$-lipschitzienne.

■

Exercice 11.41 Soit f une fonction lipschitzienne définie sur un intervalle I.
On note $E = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$.

1. Montrer que E a une borne inférieure, qu'on notera $\mathrm{Lip}(f)$.
2. Montrer que cette borne est un minimum, autrement dit que f est $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne.
3. Montrer que $E = [\mathrm{Lip}(f); +\infty[$.
4. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on $\mathrm{Lip}(f) = 0$?

■

Exercice 11.42 Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Donner un exemple de bijection continue de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$. ■

Exercice 11.43 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. ■

Exercice 11.44 Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$ pour tout réel x.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b réels ($a < b$) pour que f réalise une bijection de $[a;b]$ sur $f([a;b])$. ■

Exercice 11.45 Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction 1-lipschitzienne ($a < b$).
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [a;b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f(u_n) + u_n\right)$$

Montrer que (u_n) est bien définie, monotone et qu'elle converge vers un point fixe de f. ■

Exercice 11.46 Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$$

■

Exercice 11.47 — (★). Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
Pour tout réel positif $x \geqslant 0$, on note $M(x) = \sup_{t\in[0;x]} |f(t)|$. On suppose que

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f(x)| \leqslant A + \frac{M(x)}{2}$$

Montrer que f est bornée. ■

Exercice 11.48 — (★). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in [x; x+\delta],\ f(x) \leqslant f(y)$$

Montrer que f est croissante. ■