12. Espaces vectoriels

Structure d'espaces vectoriels

Exercice 12.1 Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit E^2 d'une loi $+$ définie par

$$\forall (x,x',y,y') \in E^4,\ (x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$$

et d'une multiplication externe $\cdot$ par les complexes définie par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in E^2,\ (a+ib)\cdot(x,y) = (ax-by, ay+bx)$$

Montrer que $(E^2,+,\cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel *(appelé le complexifié de E)*.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 12.2 Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=1\}$
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x=y=3z\}$
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy-z=0\}$
5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|=|y|\}$
6. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z \geqslant 0\}$
7. $\{(x+y,x-y,2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
8. $\{(2x-3y,x+1,3y-x) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 12.3 Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0+u_1=0\}$
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0u_1=0\}$
3. l'ensemble des suites à termes positifs
4. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n}=0\}$
5. $\{(a(-1)^n+b\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
6. l'ensemble des suites arithmétiques

Exercice 12.4 Déterminer si les parties suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ converge en } +\infty\}$
2. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ a une limite en } +\infty\}$
3. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1-x)\}$
4. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - f(x)\}$

■

Exercice 12.5 Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E lorsque :

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \mathbb{R}(0,1,0)$.
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$.
3. E est l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F est l'ensemble des fonctions affines et $G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

■

Exercice 12.6 Montrer que l'ensemble des suites périodiques est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ des suites réelles. ■

Exercice 12.7 Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $E = F \oplus G$ et $F \subset H$, alors $H = F \oplus (G \cap H)$.
2. Montrer que l'on est dans cette situation lorsque $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}(1,0,0)$, et si G et H sont les plans d'équation $x - 3y + 4z = 0$ et $y = z$ respectivement.

■

Exercice 12.8 Soit $u \in \mathbb{C}$. On considère $u\mathbb{R} = \{ux \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $u\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
À quelle condition $u\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-ev ? ■

Exercice 12.9 On considère le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions de E qui sont croissantes.

1. $\mathscr{C}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Montrer que $F = \{f - g \mid (f,g) \in \mathscr{C}^2\}$ est un sev de E.
3. A-t-on $F = E$?

■

Exercice 12.10 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. ■

Exercice 12.11 Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev E. On suppose que pour tout couple $(i,j) \in I^2$, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$.

Démontrer que $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Exercice 12.12 Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$$

■

Exercice 12.13 Soient F, G et H trois sev d'un espace vectoriel E.

1. Comparer $F \cap (G+H)$ et $(F\cap G)+(F\cap H)$.
2. Comparer $F+(G\cap H)$ et $(F+G)\cap(G+H)$.

■

Espaces engendrés

Exercice 12.14 Soient X et Y deux parties d'un espace E.

Comparer $\text{Vect}(X\cap Y)$ et $\text{Vect}(X)\cap\text{Vect}(Y)$. ■

Exercice 12.15 On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$ et on pose $u = (1,1,1)$ et $v = (1,0,-1)$.

Montrer que $\text{Vect}(u,v) = \{(2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. ■

Exercice 12.16 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et F le sous-espace des suites arithmétiques. On note u la suite constante égale à 1, et v la suite de terme $v_n = n$.

Montrer que $F = \text{Vect}(u,v)$. ■

Exercice 12.17 Dans l'espace $E = \mathscr{C}([0;\pi])$ des fonctions continues de $[0;\pi]$ dans $\mathbb{R}$, on considère les deux parties

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}(\sin,\cos)$$

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E. ■

Exercice 12.18 On se place dans le $\mathbb{K}$-ev $E=\mathbb{K}^n$. On pose $u=(1,1,\dots,1)$ et

$$F=\left\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\in E \mid \sum_{k=1}^{n} a_k=0\right\}$$

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Montrer que F et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires.

■

Applications linéaires

Exercice 12.19 Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image, et préciser si ce sont des endo/iso/automorphismes.

a : $\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ z\mapsto \mathrm{Re}(3z+i\bar{z})$

b : $\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z+e^{i\theta}\bar{z}$, où $\theta\in\mathbb{R}$

c : $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(x,xy,x-z)$

d : $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(x+y,2x+5z)$

e : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)\mapsto(u_{n^2})$

f : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)\mapsto(u_n^2)$

g : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)\mapsto(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)$

h : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^2,\ f\mapsto(f(-1),f(1))$

■

Exercice 12.20 On définit les deux applications $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(x,y)\mapsto(x,2x+y,y)$, ainsi que $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,(x,y,z)\mapsto(x+z,5x-2y+z)$.

1. Montrer que f et g sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image.
2. Montrer que $g\circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Qu'en est-il de $f\circ g$?

■

Exercice 12.21 Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $\ker(u)=\ker(u^2)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(u)\cap\ker(u)=\{0\}$. ■

Exercice 12.22 Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Im}(u^2)\Leftrightarrow \mathrm{Im}(u)+\ker(u)=E$. ■

Exercice 12.23 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev. On se donne $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$.
Démontrer :

1. $\ker(g\circ f)=f^{-1}(\ker(g))$
2. $\ker(g\circ f)\subset\ker(f)$
3. $\mathrm{Im}(g\circ f)=g(\mathrm{Im}(f))$
4. $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$
5. $\ker(g\circ f)=\ker(f)\Leftrightarrow\ker(g)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$
6. $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)\Leftrightarrow\ker(g)+\mathrm{Im}(f)=F$

■

Exercice 12.24 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit S un sous-espace supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Montrer que la restriction $f_{|S}$ de f à S est linéaire, injective et a la même image que f. ■

Exercice 12.25 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \operatorname{Im}(f)$. ■

Exercice 12.26 — Noyaux et images itérés. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(u^k)$.

1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (pour l'inclusion).
2. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croît strictement, ou alors croît strictement jusqu'à un certain rang n_0 à partir duquel elle est stationnaire.
3. Montrer que dans ce dernier cas, $N_{n_0} \cap I_{n_0} = \{0\}$.

■

Exercice 12.27 Soient $u \in (E,F)$ une application linéaire et F et G deux sev de E en somme directe. Montrer que si u est injective, alors $u(F)$ et $u(G)$ sont en somme directe. ■

Endomorphismes remarquables

Exercice 12.28 Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes. Déterminer leur nature (projecteur ou symétrie) et leurs éléments caractéristiques.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{5}(3y - x, 6y - 2x)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (-3x - 2y - 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + z)$.

■

Exercice 12.29 On définit les deux ensembles suivants :

$$F = \{(x,y,0,0) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \text{ et } G = \operatorname{Vect}(\{(1,-2,1,0),(1,-3,3,-1)\})$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
2. Expliciter la projection sur F (resp. la symétrie par rapport à F) et parallèlement à G.

■

Exercice 12.30 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que dans ce cas, $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$ et $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.

■

Exercice 12.31 — Affinités vectorielles. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle **affinité** (vectorielle) de base F_1, de direction F_2 et de rapport λ l'application $f_{F_1,F_2,\lambda} : E = F_1 \oplus F_2 \to E, x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 + \lambda x_2$.

1. Que sont les affinités vectorielles de rapport 0 ? de rapport -1 ? de base $\{0_E\}$?
2. a. Montrer que $f_{F_1,F_2,\lambda} \in \mathscr{L}(E)$ et que $F_1 = \ker(f_{F_1,F_2,\lambda} - \mathrm{Id}_E)$ et $F_2 = \ker(f_{F_1,F_2,\lambda} - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$.
   b. Montrer que si $f \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$, alors f est l'affinité vectorielle de base $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$, de direction $\ker(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$ et de rapport λ.
3. Montrer que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x, 3x-2y, -3x+3y+z)$, est une affinité vectorielle. Préciser ses éléments caractéristiques.

■

Exercice 12.32 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -f$.

1. Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f)$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}_E)$.

■

Exercice 12.33 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie. ■

Exercice 12.34 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on pose :

$$A_k = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u^2 = ku\}.$$

a) Expliciter $A_k \cap \mathrm{GL}(E)$.

b) On suppose $k \neq 0$. Soit $u \in A_k$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \{x \in E \mid u(x) = kx\}$. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans E. Ce résultat est-il encore valable si $k = 0$?

c) On suppose $k \neq 0$. Soient u, $v \in A_k$. Montrer que $u + v \in A_k$ si et seulement si $u \circ v = v \circ u = 0$. Montrer qu'alors, $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

■

Exercice 12.35 — Endomorphismes nilpotents. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u^k = 0$ (endomorphisme nul).

a) Montrer que si u est nilpotent, alors u n'est ni injectif, ni surjectif.

b) Soient u et $v \in \mathscr{L}(E)$, nilpotents et tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que les endomorphismes $u + v$ et $u \circ v$ de E sont nilpotents.

c) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u \in \mathrm{GL}(E)$.

d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. On note p le plus petit entier tel que $u^p = 0$ (donc tel que $u^{p-1} \neq 0$). Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

■

Exercice 12.36 Soient u et v deux endomorphismes de E. On suppose que u et v commutent. Montrer qu'alors $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u. ■

Familles de vecteurs

Exercice 12.37 Les familles suivantes sont-elles libres ? Génératrices ?

a. $\big((1,0,0,2),\ (0,2,0,3),\ (1,0,1,0)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$
b. $\big((3,2,1,4),\ (1,1,1,3),\ (4,2,0,2)\big)$ dans $\mathbb{R}^4$
c. $\big((1,0,1),\ (2i,2,0),\ (0,1,-i)\big)$ dans $\mathbb{C}^3$
d. $\big((2^n),\ ((-1)^n),\ (1)\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
e. $\big((2^n),\ ((-1)^n),\ ((-1)^{n+1})\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
f. $\big(\cos,\ \sin,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
g. $\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}},\ \cos,\ \sin,\ x \mapsto \cos(2x)\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
h. $\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}},\ \cos^2,\ \sin^2,\ x \mapsto \cos(2x)\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
i. $\big(x \mapsto e^x,\ x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto e^{3x}\big)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
j. $\big(\arcsin,\ \arccos,\ x \mapsto 1\big)$ dans $\mathbb{R}^{[-1;1]}$

■

Exercice 12.38 Pour $u \in \mathbb{R}$, on note $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x+u)$.
Étudier la liberté de la famille (f_a, f_b, f_c) dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (où a, b et $c \in \mathbb{R}$). ■

Exercice 12.39 Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x-a|$.
Étudier la liberté de la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. ■

Exercice 12.40 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$. ■

Divers

Exercice 12.41 — (★). Soit $(G,+)$ un groupe abélien.

1. Montrer qu'il existe au plus une loi externe $\cdot : \mathbb{Q} \times G \to G$ telle que $(G,+,\cdot)$ ait une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Montrer que pour que G puisse être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in G,\ x \neq 0_G \Rightarrow nx \neq 0_G$ (On dit que G est sans torsion)
   - $\forall x \in G,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists y \in G,\ x = ny$ (On dit que G est divisible)

■

Exercice 12.42 — (★). Soient E, F, F' et G quatre $\mathbb{R}$-ev, et u, u', v, v', f cinq applications linéaires comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dd, "f"] \arrow[dr, "v"] & \\
E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & G \\
 & F' \arrow[ur, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

On suppose de plus que :

- $f \circ u = u'$ et $v' \circ f = v$.
- u et u' sont injectives et v et v' sont surjectives.
- $\mathrm{Im}(u) = \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(u') = \ker(v')$.

Montrer que f est un isomorphisme. ■

Exercice 12.43 — (★). Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit g un projecteur de E. Montrer $\ker(f \circ g) = \ker(g) \oplus (\ker f \cap \mathrm{Im}\, g)$.
2. Soit f un projecteur de E et $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\ker f + \mathrm{Im}\, g)$.
3. Soient f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si

$$\mathrm{Im}(f) \cap (\ker f + \mathrm{Im}\, g) \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\ker f \cap \ker g)$$

■