13. Dimension des espaces vectoriels

Généralités

Exercice 13.1 Montrer que la famille $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(4,-3,2)$ dans cette base. ■

Exercice 13.2 Soient a, b, c, $d \in \mathbb{K}$. Montrer que les vecteurs (a,b) et (c,d) forment une base de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$. ■

Exercice 13.3 Donner une base de $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$. ■

Sous-espaces vectoriels

Exercice 13.4 Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (3,2,1,4)$, $b = (1,1,1,3)$, $c = (4,2,0,2)$, $d = (-1,0,1,2)$ et $e = (0,3,2,1)$. Soient $F = \mathrm{Vect}(a,b,c)$ et $G = \mathrm{Vect}(d,e)$. Déterminer la dimension et une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G, $F+G$ et $F \cap G$ de $\mathbb{R}^4$. ■

Exercice 13.5 Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, en donner une base et la dimension.

a. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}(1,2,-1)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

b. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = z+t = 0\}$ et $G = \{(a,a,b,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

c. E est l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à 3, $F = \{p \in E \mid p(0) = p(1) = 0\}$ et $G = \{p \in E \mid p(2) = p(3) = 0\}$.

■

Exercice 13.6 On appelle hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans d'un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$. On discutera selon H_1 et H_2.
2. Montrer que H_1 et H_2 ont un supplémentaire commun dans E.

■

Exercice 13.7 Déterminer le rang des familles constituées des vecteurs suivants, et préciser si elles sont une base de l'espace indiqué :

a. $(-2,5,0)$, $(1,1,0)$ et $(1,-1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b. $(2,-3,4)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$ et $(-1,2,-1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

c. $f_1 : x \mapsto (1+x)^2$, $f_2 : x \mapsto (1-x)^2$ et $f_3 : x \mapsto 1-x^2$ dans l'espace E des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

d. $x \mapsto 1$, $\cos^2$, $\sin^2$, ch^2 et sh^2 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

■

Exercice 13.8 On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos x + b\sin x + ce^x + de^{-x}\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et préciser sa dimension.
2. Montrer que les ensembles F et G constitués respectivement des fonctions paires et impaires de E sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.
3. a. Montrer que la dérivation réalise un automorphisme de E. On le note δ.

   b. Les sous-espaces F et G sont-ils stables[a] par δ ?

   Trouver deux sous-espaces supplémentaires dans E, de même dimension et stables par δ.

■

a. On dit qu'un sous-espace F d'un espace vectoriel E est **stable** par $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$.

Exercice 13.9 On suppose que le corps $\mathbb{K}$ des scalaires est infini. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel strict et non nul de E (on a $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$). Soit G un supplémentaire de F et $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de G (où $r = \dim G$).

a. Montrer que pour tout $f \in F$, la famille $(e_1+f, e_2+f, \ldots, e_r+f)$ est de rang r.

b. Pour tout $f \in F$, on pose $G_f = \text{Vect}(e_1+f, e_2+f, \ldots, e_r+f)$.
Montrer que G_f est un supplémentaire de F.

c. Soient f et f' deux vecteurs distincts de F. Montrer que $G_f \neq G_{f'}$.

d. En déduire que F admet une infinité de supplémentaires.

e. Combien les sev $\{0\}$ et E admettent-ils de supplémentaires ?

■

Applications linéaires

Exercice 13.10 Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes. En déduire, sans plus de calcul, leur image, et leur éventuel caractère injectif/surjectif/bijectif.

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y+z,\, x+y,\, x-z)$.

b. $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,t) \mapsto (2x+y+z-t,\, -3x-y+2t,\, 4x+z-t)$.

c. $\Phi : \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3)^3$, $p \mapsto (p(u),\, p(v),\, p(w))$, où (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

d. $D : E \to E$, $f \mapsto f'$, où $E = \mathrm{Vect}(\cos^2, \sin^2, \sin\cos)$.

■

Applications linéaires et rang

Exercice 13.11 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E et F respectivement. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les dimensions de A et B pour qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de noyau A et d'image B. ■

Exercice 13.12 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Justifier que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Montrer, en utilisant le théorème du rang, que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   a. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. b. $\ker(f) = \ker(f^2)$. c. $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

■

Exercice 13.13 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose F de dimension finie. Montrer que $F \subset u(F) \Rightarrow F = u(F)$.
2. Montrer que cette propriété n'est plus vraie si F n'est pas de dimension finie.

■

Exercice 13.14 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u,\, v \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}\, v$ puis que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.
3. On suppose $v \circ u = 0$ et $u+v$ bijective. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.

■

Exercice 13.15 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in (F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g_{|\operatorname{Im} f}) + \dim(\ker(g_{|\operatorname{Im} f})) = \mathrm{rg}\, f$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
3. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(F)$.

■

Exercice 13.16 — (★). Soit $\mathscr{S}$ une famille de n vecteurs de rang s, et $\mathscr{S}'$ une sous-famille de $\mathscr{S}$ constituée de n' vecteurs, de rang s'. Montrer qu'on a l'inégalité $n - s \geqslant n' - s'$. ■

Exercice 13.17 Soient E_0, E_1, ..., E_n des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

Soient f_0, f_1, ..., f_{n-1} des applications linéaires telles que $f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1})$ pour tout k.

On suppose que pour tout k on a $\operatorname{Im} f_k = \ker f_{k+1}$, on suppose aussi que $\ker f_0 = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f_{n-1} = E_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$. ■

Divers

Exercice 13.18 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini, et F et G deux sev de E. Montrer que F et G sont de même dimension si et seulement s'ils admettent un supplémentaire commun.

[De gauche à droite, on peut bidouiller avec des bases bien choisies de F et G.] ■

Exercice 13.19 — (Classique). Soit E de dimension finie n.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer que $p \leqslant n$. ■

Exercice 13.20 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

On note $n = \dim E$ et $p = \dim F$ et on suppose $n > p$.

Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de rang p. Que vaut $\ker(v \circ u)$? ■

Exercice 13.21 Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+3} = 3u_{n+2} + 6u_{n+1} + 4u_n\}$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, à quelle condition sur q a-t-on $(u_n) \in E$?
2. Déterminer $\dim_{\mathbb{C}} E$, puis une base de E.
3. Donner la dimension du sev F des suites de E de limite nulle.

■

Exercice 13.22 — (★ Oral Centrale). Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\mathrm{rg}(u^2) = 3$.
Quels sont les rangs possibles de u ? ■

Exercice 13.23 — (Oral Mines). Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $u + v = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$, où $n = \dim E$.
Montrer que u et v sont des projecteurs associés. ■

Exercice 13.24 — (★ Oral X). Soit E de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de rang $n-1$. Montrer que les seuls sous-espaces stables par u sont les $\ker u^k$, pour $k \in [\![0;n]\!]$. Quelle est la dimension de chacun de ces espaces ? ■

Exercice 13.25 — (★ Oral X). Soient f, g et h trois endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On considère les propriétés suivantes :

(i) $f \circ g \circ f = f$

(ii) $g \circ f \circ g = g$

(iii) $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g$

Montrer que deux des trois propriétés impliquent la troisième.
Si f est fixé, existe-t-il g tel que les trois propriétés soient vérifiées ? ■

Exercice 13.26 — (★ Oral Centrale). Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = 1 \Leftrightarrow (\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$ ou $\ker f = \ker g)$.
2. Donner les sous-espaces vectoriels V de $\mathscr{L}(E)$ maximaux pour l'inclusion, contenant f et tels que $\forall g \in V$, $\mathrm{rg}\, g = 1$.

■

Exercice 13.27 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Soient f, g dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \ker f + \ker g$.

1. Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

■

Exercice 13.28 — (Une formule du crible pour les sev ?).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G et H trois sev de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$\begin{aligned} \dim(F+G+H) \quad \leqslant \quad & \dim(F)+\dim(G)+\dim(H) \\ & -\dim(F\cap G)-\dim(F\cap H)-\dim(G\cap H) \\ & +\dim(F\cap G\cap H) \end{aligned}$$

2. Prouver en donnant un contre-exemple que l'inégalité peut être stricte.
   La formule du crible pour le cardinal d'une réunion d'ensembles ne se généralise donc pas aux dimensions des sev.

■

Exercice 13.29 — (★). Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Soient p_1, ..., p_n des projecteurs de E qui vérifient $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, p_i$.
2. Montrer que pour tous indices i et j distincts, on a $p_i \circ p_j = 0$.

■

Deux problèmes complets

Exercice 13.30 — (★ Familles positivement génératrices). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de vecteurs de E est *positivement génératrice* si elle vérifie $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+^*, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p$.

1. Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :
   - $\mathscr{F}$ est positivement génératrice.
   - $\mathscr{F}$ est génératrice et $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots \alpha_p e_p = 0$.

   Dans la suite de l'exercice, $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille positivement génératrice.
2. Montrer que $p \geqslant n+1$.
3. On suppose que $p \geqslant 2n+1$.
   a. Montrer qu'il existe $I \subset [\![1;p]\!]$ de cardinal n tel que la sous-famille $(e_i)_{i\in I}$ soit une base.
   b. On pose $J = [\![1;p]\!] \setminus I$. Montrer que $(e_j)_{j\in J}$ est liée.
   c. Montrer qu'il existe $K \subsetneq J$ telle que $(e_i)_{i\in I\cup K}$ soit positivement génératrice.
4. En déduire le résultat : de toute famille positivement génératrice on peut extraire une famille positivement génératrice qui a au plus $2n$ vecteurs.
5. Donner un exemple de famille positivement génératrice à $2n$ vecteurs, dont aucune sous-famille stricte n'est positivement génératrice.

■

Exercice 13.31 — (Histoires de rang). Dans ce problème, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

1. Soient g et h deux éléments de $\mathscr{L}(E)$.
   a. Prouver l'égalité $\dim \ker(h \circ g) - \dim \ker(g) = \mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(h \circ g)$.
   b. On note $\tilde{g} : \ker h \circ g \to E$ la restriction de g à $\ker h \circ g$.
   En appliquant le théorème du rang à $\tilde{g}$, montrer que $\dim g(\ker(h \circ g)) = \mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(h \circ g)$
2. Soient u, v et w trois éléments de $\mathscr{L}(E)$.
   On souhaite établir dans cette question l'inégalité $\mathrm{rg}(u \circ v) + \mathrm{rg}(v \circ w) \leqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u \circ v \circ w)$
   a. Montrer qu'il existe des entiers naturels p et q et une base $(e_1, e_2, \dots, e_{p+q})$ de $\ker(u \circ v \circ w)$ tels que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $\ker(v \circ w)$.
   b. Montrer que $\big((v \circ w)(e_{p+1}), \dots, (v \circ w)(e_{p+q})\big)$ est une famille libre de $v(\ker(u \circ v))$.
   c. En déduire $\dim \ker(u \circ v \circ w) - \dim \ker(v \circ w) \leqslant \dim \ker(u \circ v) - \dim \ker(v)$
   d. Conclure.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir la relation $2\,\mathrm{rg}(f^{k+1}) \leqslant \mathrm{rg}(f^k) + \mathrm{rg}(f^{k+2})$
   b. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ qui vérifie $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f^2) + \mathrm{rg}(f^3) = 12$, quelles sont les valeurs que peut prendre $\mathrm{rg}(f)$?
   On illustrera chaque cas par un exemple.

■