14. Dérivation

Généralités

Exercice 14.1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes, en précisant domaine de définition, domaine de dérivabilité et dérivée :

1. $x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$
2. $x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$
3. $x \mapsto \ln(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)}))$
4. $x \mapsto (x-1)\arccos x$
5. $x \mapsto x^a\,|x|^b$ où $a,\,b \in \mathbb{R}_+^*$
6. $x \mapsto \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 14.2 Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition et de continuité, prolongement éventuel par continuité, dérivabilité, variations, représentation graphique) :

1. $x \mapsto \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $x \mapsto x^x$
3. $x \mapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\sin(\pi x)$
4. $x \mapsto x\ln|x|$
5. $x \mapsto x^2\ln|x|$
6. $x \mapsto e^{-1/x^2}$
7. $x \mapsto 1/\ln x$
8. $x \mapsto x^{1/x}$
9. $x \mapsto \ln\ln x$

Exercice 14.3 On considère l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y' + (3x-1)y = x^2(x+1)$.

1. Déterminer des constantes α et $\beta \in \mathbb{R}$ telles que $\dfrac{3x-1}{x(1-x)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{1-x}$.
2. Déterminer une solution polynomiale de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions sur $]-\infty;0[$, $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E).
4. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.4 La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite en 0 ? ■

Exercice 14.5 Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et discontinue en tout autre point. ■

Exercice 14.6 Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$ pour tout couple (x, y) de réels est constante. ■

Exercice 14.7 — (Dérivée symétrique). Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Lorsque la limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe et est finie, on la note $f_s'(a)$ et on l'appelle dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que si f est dérivable à gauche et à droite, alors $f_s'(a)$ existe et donner sa valeur en fonction de $f_g'(a)$ et $f_d'(a)$.
2. Donner un exemple de fonction qui a une dérivée symétrique en un point sans être dérivable à droite et à gauche.
3. Si f est est croissante sur I et admet une dérivée symétrique en tout point, que peut-on dire du signe de f_s' ?
4. Si $f_s'(a)$ existe et vaut 0 pour tout $a \in I$, peut-on en déduire que f est constante sur I ?

■

Exercice 14.8 Justifier que la fonction $x \mapsto x + \cos x$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? ■

Dérivées successives

Exercice 14.9 Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
3. $x \mapsto \cos^3 x$
4. $x \mapsto x^2 e^x$
5. $x \mapsto e^x \sin x$

■

Exercice 14.10 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^n(1+x)^n$
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

■

Exercice 14.11 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner une expression de la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^{2n}$ en utilisant la formule de Leibniz.
2. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

■

Exercice 14.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(0)}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$.
2. En déduire une relation de récurrence entre les a_n, et calculer ceux-ci pour $n \leqslant 7$.

■

Exercice 14.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$ pour $x \neq 0$, où P_n est un polynôme en x qu'on ne cherchera pas à expliciter mais dont on précisera le degré.
2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les nombres dérivés successifs de f en 0.
3. Tracer une représentation graphique de f.
4. Construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui soit nulle sur $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et strictement positive sur $]-1;1[$.

■

Exercice 14.14 — (★). Établir pour tout $n \geqslant 1$ la formule suivante :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right) = (-1)^n x^{-n-1} e^{1/x}$$

■

Exercice 14.15 — (★). Montrer que la fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$\arctan^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(\arctan x)\sin\left(n\arctan x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

■

Exercice 14.16 — (★). Soient f_1, f_2, ..., f_n des fonctions p fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(f_1 \dots f_n)^{(p)} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \frac{p!}{k_1!\dots k_n!} f_1^{(k_1)} \dots f_n^{(k_n)}$$

■

Rolle et accroissements finis

Exercice 14.17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point de I. ■

Exercice 14.18 Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1])$. On suppose $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe un $a \in \left]0;1\right[$ tel que la tangente au graphe de f en le point d'abscisse a passe par l'origine. ■

Exercice 14.19 Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1])$.

On suppose $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in \left]0;1\right[$ tel que $f'(c) = 0$. ■

Exercice 14.20 — (★). Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant P ayant la propriété suivante : il existe une infinité de réels x tels que $P(x) = \sin x$. ■

Exercice 14.21 — Théorème de Rolle sur $[a;+\infty[$. Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$, dérivable sur $]a;+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

[On peut introduire une fonction auxiliaire bien choisie.] ■

Exercice 14.22 — Théorème de Rolle sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et convergeant vers une même limite finie ℓ en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. ■

Exercice 14.23 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que f'' ne s'annule pas sur $]a;b[$. Montrer qu'alors f ne s'annule pas sur $]a;b[$. ■

Exercice 14.24 — Théorème de Darboux. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

1. On suppose qu'il existe $a, b \in I$ tels que $f'(a) < 0 < f'(b)$.
   a. On suppose $a < b$ (resp. $a > b$). Justifier que f admet un minimum sur $[a;b]$ (resp. un maximum sur $[b;a]$), et que cet extremum est atteint sur $]a;b[$.
   b. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f'(a) < \lambda < f'(b)$.
   Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
3. En déduire que l'image $f'(I)$ de l'intervalle I par f' est un intervalle[a].

■

a. Autrement dit, une fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue.

Exercice 14.25 — Règle de L'Hospital. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$, et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a;b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
2. En déduire la règle de L'Hospital : si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
3. En déduire les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{argsh} x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

■

Exercice 14.26 À l'aide d'une inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \approx 100 \qquad 0{,}99^2 \approx 1 \qquad \cos(1) \approx \frac{1}{2}$$

■

Exercice 14.27 Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}+,\ e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

■

Exercice 14.28 Soit $f \in \mathscr{C}^1([a;b])$. Montrer que f est lipschitzienne. ■

Exercice 14.29 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ périodique. Montrer que f est lipschitzienne. ■

Exercice 14.30 Soient f et $g \in \mathscr{D}^1([0;1])$.
On suppose $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$.
On suppose aussi $f'(0) > g'(0)$ et $f'(1) > g'(1)$.
Montrer qu'il existe un point $c \in \,]0;1[$ tel que $f(c) = g(c)$. ■

Exercice 14.31 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.
Montrer que la dérivée de f s'annule en au moins un point de $[a;b]$. ■

Exercice 14.32 Soient $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Montrer qu'on a :

$$\exists x \in \,]a;a+2h[\, , \; f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$$

[On pourra introduire $\varphi : x \mapsto f(x+h) - f(x)$] ■

Exercice 14.33 En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}$$

■

Exercice 14.34 — (Exercice détente). Dans un disque de carton de rayon R, on découpe un secteur angulaire d'angle x radians ($x \in [0;2\pi]$), avec lequel on confectionne un cornet de frites conique. Déterminer x pour que le volume du cornet soit maximal.
[Le volume d'un cône est $V = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$] ■

Exercice 14.35 — (★). Soit $f : \,]0;1[\, \to \mathbb{R}_+$ une fonction dérivable et positive sur $]0;1[$.
Chercher toutes les implications vraies entre les quatre assertions suivantes :

(i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$

(iii) f' n'est pas bornée sur $]0;1]$.

(iv) f n'est pas bornée sur $]0;1]$.

■

Étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 14.36 Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \quad u_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} \dots$$

Exercice 14.37 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1;2]$, et que le segment $[1;2]$ est stable par f.
2. En déduire que si $u_0 \in [1;2]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Exercice 14.38 Étudier la nature des suites (u_n) définies par les relations de récurrence suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$
3. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$
4. $u_0 \geqslant -\dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
5. $u_0 \in \,]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n(1 - u_n)$
6. $u_0 \in \,]0;\pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$
7. $u_0 \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n$

Exercice 14.39 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$ sur son domaine de définition D. Justifier que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en 0.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant e$, on a l'encadrement $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

Exercice 14.40 — (★). Soit u une suite définie par $u_0 \in \left]0;1\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$.

Montrer que u converge.

Montrer que si elle n'est pas stationnaire alors sa limite est nulle. ■

Exercice 14.41 — Points fixes attractifs et répulsifs. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| < 1$.
   a. Justifier l'existence de $k \in [0;1[$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \leqslant k$ sur $V \cap I$.
   b. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \in V$.
   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p+n} - c| \leqslant k^n |u_p - c|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.
2. Soit c un point fixe de f tel que $|f'(c)| > 1$.
   a. Justifier l'existence de $k > 1$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \geqslant k$ sur $V \cap I$.
   b. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{p+n} \in V$.
   Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p+n} - c| \geqslant k^n |u_p - c|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est constante égale à c.

■