15. Développements limités

Propriétés des développements limités

Exercice 15.1 Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$, de partie régulière P.

1. Justifier que la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, et en donner la partie régulière.
2. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors P est paire (resp. impaire).

■

Exercice 15.2 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-1/x} \sin e^{1/x}$ et prolongée en 0 par $f(0) = 0$.

Quelle est la classe de la fonction f ? Montrer que f admet néanmoins un développement limité à tout ordre en 0, que l'on précisera. ■

Exercice 15.3 Soit $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 15 secondes. ■

Exercice 15.4 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - \sin(y) = 0$. On admet qu'il existe une unique solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Le but de l'exercice est de calculer le $\mathrm{DL}_8(0)$ de f.

1. Justifier que f est impaire et de classe $\mathscr{C}^\infty$. En déduire que f admet un $\mathrm{DL}_8(0)$, et que celui-ci est de la forme $f(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + o(x^8)$, pour certains $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence et la forme des $\mathrm{DL}_6(0)$ des fonctions f'' et $\sin \circ f$, puis conclure.

■

Calculs de développements limités

Exercice 15.5 Calculer les développements limités suivants :

a. $DL_6(0)$ de $\cos^2$.

b. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

c. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

d. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

e. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+3x}}$.

f. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(2-3x)$.

g. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{2+x}$.

h. $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x - \sqrt[3]{(1+x)}$.

i. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}\operatorname{sh}(x)$.

j. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

k. $DL_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

l. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x\cos x}{\sin x}$.

m. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$.

n. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

o. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x)$.

p. $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x}$.

q. $DL_5(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^x$.

r. $DL_7(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos^2 x}$.

s. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$.

t. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+\sin x)^{\cos x}$.

u. $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\sqrt{\ln(x+2)}}$.

v. $DL_6(0)$ de $x \mapsto \arctan(\cos x^2)$.

w. $DL_4(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

x. $DL_{16}(0)$ de
$x \mapsto (\operatorname{sh} x - \sin x)^2(\tan x - \operatorname{th} x)^3$.

y. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\arcsin^2 x}$.

z. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

■

Exercice 15.6 Calculer les développements limités suivants :

a. $DL_4(2)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

b. $DL_3(1)$ de $x \mapsto 3^x$.

c. $DL_2(\frac{\pi}{4})$ de tan.

d. $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.

e. $DL_3(1)$ de $x \mapsto x^x$.

f. $DL_2(\frac{\pi}{3})$ de $x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$.

g. $DL_3(\frac{\pi}{6})$ de $x \mapsto e^{\sin x}$.

h. $DL_5(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \ln(\tan x)$.

■

Formules de Taylor

Exercice 15.7

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

b. En déduire, à x fixé, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

■

Exercice 15.8 En exploitant une formule de Taylor adéquate, établir

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

■

Applications des développements limités

Exercice 15.9 Étudier le prolongement par continuité en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$.

(En particulier : la courbe admet-elle une tangente et si oui que dire de la position de la courbe par rapport à cette tangente ?). ■

Exercice 15.10 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x} - 1$ peut être prolongé en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. ■

Exercice 15.11 On pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ pour tout x dans $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que la fonction prolongée est dérivable en 0.

Quelle est la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 ? ■

Exercice 15.12 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$.

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$.

d. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}$.

e. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

f. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

■

Exercice 15.13 Donner un équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = \cos(\cos x) - \sin x$. ■

Exercice 15.14 Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1$. ■

Exercice 15.15 Donner un équivalent en 0 de $f(x) = \operatorname{sh}(\sin x) - \sin(\operatorname{sh} x)$. ■

Exercice 15.16 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$.

b. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

c. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right)$.

■

Exercice 15.17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ \ell & \text{si } x = 0 \end{cases}$, où $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer ℓ pour que f soit continue en 0. *On suppose désormais que ℓ prend cette valeur.*
2. Montrer que f est dérivable en 0, préciser l'équation de sa tangente en 0 et la position locale du graphe de f par rapport à cette tangente.

■

Exercice 15.18 Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \frac{x+1}{2(x-1)} \ln x$.

b. $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

c. $x \mapsto x + \sqrt{|x^2-1|}$.

■

Exercice 15.19 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a. x^x en 0^+

b. $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$ en $+\infty$

c. $\dfrac{\sin x}{x^{x^x}-x}$ en 0^+

d. $(\cos x)^{\ln x}$ en 0^+

e. $\dfrac{2\tan x-\tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}$ en 0

f. $\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}-x$ en $+\infty$ (où n est un entier fixé)

g. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ en 0

h. $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/\sin x}$ en 0

i. $\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x^2\ln x}$ en 0^+

j. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}$ en 0

k. $\dfrac{\left((x+1)^{1/x}-x^{1/x}\right)(x\ln x)^2}{x^{x^{1/x}}-x}$ en $+\infty$

l. $(\operatorname{ch}\sqrt{x+1}-\operatorname{ch}\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ en $+\infty$

m. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\arccos\left(\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}\right)$ en 0^+

n. $\dfrac{\sin\ln x-\sqrt{\left|\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|}}{x-1}$ en 1^-

o. $\dfrac{(\sin x)^x-x^{\sin x}}{(\sin x)^{\tan x}-(\tan x)^{\sin x}}$ en 0^+

p. $\left(\dfrac{1+a^x}{2}\right)^{1/x}$ en $+\infty$ $(a>0)$

q. $\left(\dfrac{1+a^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0^+ $(a>0)$

Exercice 15.20 L'équation $y^4+y=x$ admet une unique solution y lorsque x est dans un voisinage de 0. On la note $f(x)$.

Justifier cette assertion et donner un développement limité à l'ordre 12 de f en 0.

Développements asymptotiques

Exercice 15.21 Calculer les développements asymptotiques en 0 à la précision demandée :

a. x^x à la précision $(x\ln x)^2$.

b. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $x^{5/2}$.

Exercice 15.22 Calculer les développements asymptotiques en $+\infty$ à la précision demandée :

a. $\sqrt{4+x}$ à la précision $x^{-3/2}$.

b. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ à la précision $1/x^2$.

c. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 15.23

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$, pour tout entier naturel n.
2. Former un développement asymptotique de (x_n) à la précision $\frac{1}{n^2}$.

■

Exercice 15.24

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $x - n\ln x = 0$ admet deux racines distinctes $u_n < v_n$ dans l'intervalle $]0; +\infty[$
2. Étudier la monotonie de (u_n) et (v_n).
3. Donner un développement asymptotique de (u_n) à la précision $\frac{1}{n^2}$.
4. Donner un équivalent de (v_n).

■

Exercice 15.25 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

Après avoir justifié l'existence et l'unicité de (u_n), étudier la suite et en donner un développement asymptotique à deux termes. ■

Exercice 15.26 Montrer l'existence et l'unicité d'une suite réelle (x_n) vérifiant $e^{x_n} + x_n = n$, puis en donner un développement asymptotique à trois termes. ■

Exercice 15.27 Soit $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $g = f^{-1}$. Donner le $\mathrm{DL}_2(1)$ de g.
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de g en $+\infty$.

■