16. Intégration

Propriétés de l'intégrale

Exercice 16.1 Soient $a < b$ deux entiers relatifs. Calculer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor \, dx$, où $\lfloor \ \rfloor$ désigne la partie entière. ■

Exercice 16.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. ■

Exercice 16.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^n \sum_{k=0}^n |x-k| \, dx$. ■

Exercice 16.4 Soit $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$. Montrer que l'on a l'équivalence suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| = \int_a^b |f(x)| \, dx \iff f \text{ est de signe constant sur } [a;b].$$

■

Exercice 16.5 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0;1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe. ■

Exercice 16.6 Soit f continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

On note $m = \min_{[0;1]} f$ et $M = \max_{[0;1]} f$.

Montrer que $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -mM$. ■

Exercice 16.7 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0;1])$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule en au moins n points distincts de $[0;1]$.

(On pourra fabriquer à partir de f une fonction de signe constant.) ■

Exercice 16.8 Soit f continue de $[0;\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que f s'annule en au moins deux points distincts de $]0;\pi[$. ■

Exercice 16.9 — Lemme de Riemann-Lebesgue.

Le but est de montrer que si $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, traiter le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.
2. Traiter le cas où f est une fonction en escalier sur $[a;b]$.
3. En déduire le résultat général en utilisant le résultat d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier.

■

Techniques de calcul intégral

Exercice 16.10 Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{-1}^1 \arccos(x)\,\mathrm{d}x$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$

e. $\int_0^3 \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

f. $\int_1^e \frac{1}{x+x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

g. $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

i. $\int_0^x \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,\mathrm{d}t$

■

Exercice 16.11 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto (1+\tan x)^2$

b. $x \mapsto x\sin^3(x)$

c. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

d. arcsin

e. $x \mapsto \dfrac{\tan}{\cos^2}$

f. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x}$

g. $\dfrac{1}{\sin}$

h. $\arcsin^2$

i. $\cos \circ \ln$

■

Exercice 16.12 Calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$ pour p et q dans $\mathbb{N}$.

■

Exercice 16.13 Déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité et calculer la dérivée (lorsqu'elle existe) des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$
2. $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} \tan t \,\mathrm{d}t$
3. $h : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{2-t^3}$

■

Exercice 16.14 — Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que w_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer w_0 et w_1.
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
4. En déduire l'expression générale de w_n en fonction de n (on séparera les cas pair et impair).
5. Montrer que $n w_n w_{n-1}$ est constant et que $w_{n-1} \sim w_n$.
6. En déduire un équivalent simple de w_n.

■

Exercice 16.15 — (★) Une fonction implicite.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$. Dans la suite, on note $y = \varphi(x)$ le réel ainsi associé à x.
2. Montrer que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que φ est continue puis dérivable.
4. Montrer que le graphe de φ admet un axe de symétrie et une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Donner l'allure du graphe de φ.

■

Exercice 16.16 — Inégalité de Young. Soit $a > 0$, $f : [0;a] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et telle que $f(0) = 0$. La fonction f est donc une bijection de $[0;a]$ dans $[0;f(a)]$ et on note $g : [0;f(a)] \to [0;a]$ sa bijection réciproque. On pose pour $x \in [0;a]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$$

1. On suppose f dérivable. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Que vaut $F(0)$ et que peut-on en déduire ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in [0;a]$ et tout $\beta \in [0;f(a)]$ on a :

$$\alpha\beta \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. *Application :* Soient p et q strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   Montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

■

Exercice 16.17 Le but de l'exercice est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Étude de la fonction f.*
   a. Déterminer le domaine D de définition de f.
   b. Montrer que f est dérivable sur D et calculer sa dérivée.
   c. En déduire les variations de f sur D.
2. *Prolongement par continuité en* 0.
   a. À l'aide de l'inégalité de la moyenne, montrer que f tend vers 0 en 0.
   b. Étudier alors la dérivabilité du prolongement par continuité de f en 0.
3. *Prolongement par continuité en* 1. On pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in D$.
   a. Montrer que pour tout $x \in D$, $g(x)$ est entre $\frac{1}{x}f(x)$ et $\frac{1}{x^2}f(x)$.
   b. Calculer $g(x)$ et en déduire que f peut être prolongée par continuité en 1.
   c. Étudier alors la dérivabilité du prolongement par continuité de f en 1.

■

Sommes de Riemann

Exercice 16.18 Calculer la limite des suites de terme général suivant :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

c. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

d. $\displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}$

e. $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\frac{k\pi}{n}$

f. $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{1/n}$

g. $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n+k}}$

h. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n^2}$

■

Exercice 16.19 Soit $A_1A_2A_3\ldots A_n$ un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}A_1A_k$. ■

Exercice 16.20 Soit $p\in\mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$ quand n tend vers $+\infty$. ■

Divers

Exercice 16.21 Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que $f''\geqslant 0$ sur I. Montrer à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que la courbe de f est située au-dessus de ses tangentes. ■

Exercice 16.22 En encadrant l'intégrale, calculer $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. ■

Exercice 16.23 — (★). Soient $a<b$ deux réels et f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\displaystyle\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\max_{[a;b]} f$. ■

Exercice 16.24 Soit $f \in \mathscr{C}([a;b])$ vérifiant $f(a+b-x) = f(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire les valeurs de $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

■

Exercice 16.25 Pour $x > 1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   On pourra commencer par une intégration par parties.
2. (★) Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

■

Exercice 16.26 — (★). Trouver un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
On peut s'inspirer de l'exercice précédent. ■

Exercice 16.27 — Une bonne approximation de π.

1. Pour tous p, $q \in \mathbb{N}$, on pose $A_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.
   a. Lorsque $q \geqslant 1$, établir une relation entre $A_{p,q}$ et $A_{p+1,q-1}$.
   b. Calculer $A_{p,0}$ et en déduire la valeur de $A_{p,q}$ en fonction de p et q.
2. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
   a. Déterminer des réels a, b, c, d, e, f, g et h tels que
   $$\forall x \in [0;1]\,,\ \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g + \frac{h}{1+x^2}$$
   b. En déduire que I est égal à $\dfrac{22}{7} - \pi$.
3. En comparant I à $A_{4,4}$, montrer que $\dfrac{22}{7}$ approche π à moins de $0,002$ près.

■

Exercice 16.28 — (★) Irrationalité de π.

On se propose de montrer que $\pi \notin \mathbb{Q}$. Pour ce faire, on va raisonner par l'absurde en supposant que $\pi = \dfrac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et on définit les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)$$

$$G : x \mapsto F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)$$

1. Montrer que G est dérivable et expliciter $G'(x)$ à l'aide de la fonction F.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)$.

   Désormais, on pose $f(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!}$.
3. Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que $f^{(j)}(0) = 0$.
4. Calculer le coefficient de x^{n+j} dans l'expression développée de $f(x)$, pour $j \in [\![0, n]\!]$.
5. Calculer $f^{(n+j)}(0)$.
6. Prouver que $F(0) \in \mathbb{Z}$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi - x) = f(x)$.
8. Prouver que $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.
9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_n \in \mathbb{N}^*$.
10. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
11. Conclure.

■

Exercice 16.29 — Intégrale de Dirichlet.

Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, ce qu'on notera aussi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

On pose alors $I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Il n'y a pas de problème en $t = 0$: on intègre implicitement le prolongement par continuité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et la fonction I est bien définie.

2. **Un résultat de convergence.**

Soient f, et $g \in \mathscr{C}^0([1;+\infty[)$. On suppose que $|f| \leqslant g$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.

a) On note $f^+(t) = \max\{0, f(t)\}$ et $f^-(t) = \max\{0, -f(t)\}$ pour tout $t \in [1;+\infty[$. Exprimer f et $|f|$ en fonction de f^+ et f^-.

b) Étudier la monotonie de $F^+ : x \mapsto \int_1^x f^+(t)\,\mathrm{d}t$.
En déduire que F^+ a une limite finie en $+\infty$.

c) Montrer de même que $F^- : x \mapsto \int_1^x f^-(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie en $+\infty$ et en déduire que $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand x tend vers $+\infty$.

d) Application : montrer que $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également.

e) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I(x)$ converge quand $x \to +\infty$.

3. **Calcul de la limite de I en $+\infty$**

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$. Justifier que A_n est bien défini.

b) Montrer que $A_n - A_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la valeur de A_n.

c) Montrer que si h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors l'intégrale $B_n = \int_0^{\pi/2} h(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

d) Montrer que l'application $h : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

e) En combinant les résultats précédents, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

■