17. Matrices

Calcul matriciel élémentaire

Exercice 17.1 On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice réelle A telle que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le produit BA.

■

Exercice 17.2 On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, i.e. telles que $AM = MA$.
2. Montrer que ces matrices sont les combinaisons linéaires de I_2 et de A.

■

Exercice 17.3 Pour $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application $\pi_B : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto BM$. Déterminer l'injectivité et la surjectivité de π_B, et expliciter $\operatorname{Im} \pi_B$ et $\ker \pi_B$ lorsque :

1. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

■

Exercice 17.4 — Matrice et matrice transposée.

1. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices $M{}^tM$ et ${}^tMM$ sont symétriques.
2. Lorsque M est carrée, a-t-on nécessairement $M{}^tM = {}^tMM$? ou $M{}^tM \neq {}^tMM$?
3. Montrer que toute matrice carrée se décompose de façon unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

■

Exercice 17.5 — Trace : questions de cours et au delà. Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace** de A le scalaire $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. a. Montrer que $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire.

   b. Résoudre l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = 0_n$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. A-t-on nécessairement $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$?
3. Comparer $\mathrm{tr}(ABC)$, $\mathrm{tr}(CAB)$, $\mathrm{tr}(BAC)$ pour A, B et C trois matrices quelconques.

■

Calcul matriciel, structure

Exercice 17.6 — Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle commutant de A l'ensemble $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ des matrices qui commutent avec A. Montrer que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stable pour la multiplication.
2. Soit $(i, j) \in [\![1;n]\!]^2$. Décrire à quelles conditions une matrice M appartient à $C(E_{i,j})$. En déduire la dimension et une base de $C(E_{i,j})$.
3. On appelle centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices qui commutent avec toutes les autres. Montrer que le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vaut $\bigcap_{1 \leqslant i,j \leqslant n} C(E_{i,j})$ puis expliciter $\mathscr{C}$.
4. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

■

Exercice 17.7 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer (c'est facile !) que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée. Montrer ensuite (c'est moins facile) que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2-1})$ est liée.
(En deuxième année, on montrera qu'en fait $(I_n, A, A^2, \dots, A^n)$ est liée.) ■

Exercice 17.8 — Conjugaison. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est aussi un morphisme pour le produit de matrices. ■

Exercice 17.9 — Une construction du corps des complexes.

On pose $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que C est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, préciser sa dimension et en donner une base.
2. Montrer que C est stable pour le produit matriciel et que deux éléments de C commutent.
3. Montrer que tout élément non nul de C est inversible dans C. (On en déduit que C, muni des restrictions à C de la somme et du produit matriciels, est un corps.)
4. Montrer que l'application $a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme du corps $\mathbb{C}$ sur C.

■

Exercice 17.10 — (★) Un vieil oral de Centrale. Montrer que si une matrice triangulaire supérieure commute avec sa transposée, alors elle est diagonale. ■

Exercice 17.11 — (★) Un vieil oral de l'X. Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Montrer que si $\lambda AB + A + B = 0$, alors A et B commutent. ■

Calculs de puissances

Exercice 17.12 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$ et en déduire une expression de A^2 en fonction de A et I_3.
2. Justifier que A est inversible, et expliciter A^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

■

Exercice 17.13 Calculer les puissances n-ièmes des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 17.14 Même exercice avec les matrices $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Exercice 17.15 Soient $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$. Sans calcul, justifier que D est inversible et expliciter D^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. Justifier que M est inversible et que $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Expliciter M^{-1}.

■

Exercice 17.16 Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -3 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les équations $MX = X$ et $MX = -2X$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes C_1, C_2 et C_3 sont non proportionnelles et telles que $MC_1 = C_1$, $MC_2 = C_2$ et $MC_3 = -2C_3$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}MP$. La matrice M est-elle inversible ?
4. Expliciter la matrice M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Exercice 17.17 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{3}(5u_n + 2v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
2. Le but de cette question est d'expliciter la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   b. Pour chacune des valeurs trouvées en 2a, résoudre le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   c. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ telles que $AP = P\Delta$.
   d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire l'expression générale de A^n.
3. Donner le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■

Exercice 17.18 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M^3 = (0)_n$.

1. Une telle matrice M est-elle inversible ?
2. Expliciter la matrice $(I_n + M)^p$, pour $p \in \mathbb{N}$, en fonction de I_3, M, M^2 et p.
3. Justifier que la matrice $I_n + M$ est inversible et que la formule obtenue dans la question précédente est encore valable pour $p = -1$.
4. Expliciter l'inverse et la puissance p-ième, pour $p \in \mathbb{N}$, de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■

Exercice 17.19 — Matrices triangulaires nilpotentes. Montrer que toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.

Donner un exemple de matrice nilpotente non triangulaire. ■

Matrices et applications linéaires

Exercice 17.20 — Un projecteur. On se place dans $\mathbb{R}^3$.

Écrire la matrice dans la base canonique du projecteur sur le plan d'équation $x+y+2z=0$ parallèlement à la droite dirigée par $(1,2,1)$. ■

Exercice 17.21 — Une symétrie. On se place dans $\mathbb{R}^n$.

Écrire la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport au plan d'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(1,1,\dots,1)$. ■

Exercice 17.22 — Matrices triangulaires. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et A la matrice de E dans la base $\mathscr{B}$.

Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ est stable par u pour tout $k \in [\![1;n]\!]$. ■

Exercice 17.23 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $f(M) = AM$.

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et décrire sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. (On pourra commencer par examiner le cas $n=2$...) ■

Rang et inverse

Exercice 17.24 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les termes valent 1, et A la matrice carrée de taille n dont tous les termes non diagonaux valent 1, et dont les termes diagonaux valent $1+a$.

1. Calculer J^2 en fonction de J.
2. a. Écrire A comme combinaison linéaire de J et de I_n.
   b. Calculer A^2 en fonction de J et de I_n, puis en fonction de A et de I_n.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A soit inversible, et expliciter alors A^{-1}.

■

Exercice 17.25 Déterminer le rang, et le cas échéant calculer l'inverse, des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 17.26 Pour quelles valeurs des paramètres a et b les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & a^3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & 2b & 2 \\ 2 & -ab & 2 \\ 2 & 2b & a \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 17.27 Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est somme de deux matrices inversibles. En déduire $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$. ■

Exercice 17.28 — Sur les matrices de rang 1.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices colonnes non nulles $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = X\,{}^tY$.
2. Soient $A = X\,{}^tY$ et $A' = X'\,{}^tY'$ deux matrices de rang 1. À quelle CNS sur (X,Y) les matrices A et A' sont-elles colinéaires ? À quelle condition sont-elles égales ?
3. Soit $A = X\,{}^tY$ une matrice de rang 1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Exercice 17.29 Déterminer le rang de la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $a_{ij} = \cos(i+j-2)$. ■

Exercice 17.30 — (★) Théorème d'Hadamard.
Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice qui vérifie, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

En déterminant $\ker A$, montrer que A est inversible.
(On dit d'une telle matrice qu'elle est *à diagonale (strictement) dominante*.) ■

Systèmes linéaires

Exercice 17.31 Résoudre les systèmes linéaires suivants, en fonction des paramètres éventuels :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & - & y & + & z & + & t & = & 6 \\ -9x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & 8 \\ x & - & y & + & z & & & = & 3 \\ -3x & + & & & z & + & t & = & 6 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 2by & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & aby & + & 2z & = & b \\ 2x & + & 2by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & - & 10y & - & z & - & 7t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ 2x & - & 4y & - & z & - & 3t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 4z & & & = & a \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcrcl} mx & + & y & = & 1 \\ 3x & + & (m-2)y & = & -3 \end{array}\right.$$

■

Exercice 17.32 Calculer une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 17.33 Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice suivante, et donner une base de son noyau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 17.34 — Un problème géométrique.

1. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & a_1 \\ x_2 & + & x_3 & = & a_2 \\ & & & \vdots & \\ x_{n-1} & + & x_n & = & a_{n-1} \\ x_n & + & x_1 & = & a_n \end{array}\right.$$

2. On se donne n points $A_1, \ldots, A_n$ dans le plan. Peut-on trouver un polygone à n côtés tel que les points A_i soient les milieux des n côtés de ce polygone ?

■

Exercice 17.35 — A et ${}^tA$ sont semblables.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose $b \neq 0$.

On considère le système linéaire $(\mathscr{S})$: ${}^tAP = PA$ d'inconnue $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(\mathscr{S})$ est équivalent à $y = z$ et une équation en x, y et t que l'on précisera.
2. Résoudre $(\mathscr{S})$ et donner une base de l'ensemble des solutions.
3. Montrer que $(\mathscr{S})$ admet une solution P inversible.
4. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

■

Exercice 17.36 — (★).

Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 17.37

Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$, où H_1, H_2, H_3 et H_4 sont les hyperplans de $\mathbb{R}^5$ d'équations respectives

$$\begin{array}{rcl} (H_1) & : & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ (H_2) & : & x_1 = x_2 + x_3 - 3x_5 \\ (H_3) & : & x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ (H_4) & : & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{array}$$

■