18. Polynômes

Généralités

Exercice 18.1 Simplifier les deux polynômes

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \text{ et } Q_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

■

Exercice 18.2 Pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$, on pose $f(P) = \dfrac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$.

1. Montrer que l'application f ainsi définie réalise un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
3. Montrer que f est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.

■

Exercice 18.3 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $g(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que g réalise un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. a. Montrer que si P est de degré $n \geqslant 1$, alors $g(P)$ est de degré $n-1$.
   b. En déduire $\ker(g)$, et $g(\mathbb{K}_n[X])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. a. Résoudre l'équation $g(P) = X^4$ dans $\mathbb{K}[X]$.
   b. En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$.

■

Exercice 18.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on note $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. ■

Exercice 18.5 Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et trouver sa dimension. ■

Équations dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 18.6 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$, ou $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. $Q^2 = XP^2$
2. $P \circ P = P$
3. $P'^2 = 4P$
4. $(X^2+1)P'' = 6P$
5. $P(X^2) = (X^2+1)P$

■

Formule de Taylor

Exercice 18.7 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$P(a) > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P^{(k)}(a) \geqslant 0$$

Montrer que P n'a pas de racine dans l'intervalle $[a;+\infty[$. ■

Exercice 18.8 Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a :

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

■

Division euclidienne

Exercice 18.9 Effectuer la division euclidienne de A par B, et dire si B divise A, dans les cas suivants :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$.
2. $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.
3. $A = X^4 - (1-i)X^3 + 2iX + 1$ et $B = iX^2 + X + 1 + i$.
4. $A = X^6 + 1$ et $B = X^2 + \sqrt{3}X + 1$.

■

Exercice 18.10 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme $(X\cos t + \sin t)^n$ par X^2+1. ■

Exercice 18.11 Soient B et $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose B unitaire et de degré 2.

1. *On suppose dans cette question que B a deux racines distinctes a et b dans $\mathbb{C}$.*
   a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par B, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
   b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste dans la division euclidienne de $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}X\right)^n$ par $X^2 + 1$.
2. *On suppose dans cette question que B a une racine double a dans $\mathbb{C}$.*
   a. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par B, en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
   b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2iX - 1$.

■

Exercice 18.12 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme fixé de degré $d \in \mathbb{N}^*$, et soit φ l'application qui à un polynôme A associe le reste de la division euclidienne de A par B.

1. Montrer que φ est une projection de $\mathbb{K}[X]$. Préciser ses éléments caractéristiques.
2. On fixe $B = X^2 - 3X + 1$. Soit φ_4 l'application linéaire $\mathbb{K}_4[X]$ dans $\mathbb{K}_1[X]$ induite par φ.
   a. Déterminer la matrice de φ_4 dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_4[X]$ et de $\mathbb{K}_1[X]$.
   b. En déduire le reste dans la division euclidienne de $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ par B.

■

Divisibilité - PGCD

Exercice 18.13 Calculer le PGCD de A et $B \in \mathbb{R}[X]$:

1. $A = X^3 - X^2 - 2$ et $B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 1$.
2. $A = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$.
3. $A = X^9 - X^6 + X^3 - 1$ et $B = X^6 - 1$
4. $A = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $B = 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

■

Exercice 18.14 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
2. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
3. On note pour $n \in \mathbb{N}$: $P^{[n]} = P \circ \cdots \circ P$. Montrer que $P(X) - X \mid P^{[n]}(X) - X$.

■

Exercice 18.15 Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence

$$p \mid q \quad \Leftrightarrow \quad X^p - 1 \mid X^q - 1$$

■

Racines - Dérivée - Arithmétique

Exercice 18.16 Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $(X+2)^2 \mid (P-1)$ et $(X-1)^3 \mid (P+2)$.

1. Montrer que P' est divisible par $X+2$ et $(X-1)^2$.
2. En déduire P', à une constante multiplicative près, puis déterminer P.

■

Exercice 18.17 — Racines rationnelles.

1. Soit $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.
   Soit $r = \dfrac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$) une racine rationnelle non nulle de P.
   Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Trouver les racines rationnelles puis écrire la factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$ du polynôme :

$$P(X) = 2X^5 - 5X^4 - 21X^3 - 15X^2 - 23X - 10$$

■

Exercice 18.18 Déterminer le noyau de $\varphi : \mathbb{R}_5[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P''(1)$. ■

Exercice 18.19 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

a. $P' \mid P$ b. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ c. $P'P'' = 18P$

■

Exercice 18.20 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $Q = P+1$ et $T = P^{2n} + Q^n - 1$, pour $n \geqslant 1$. Montrer que PQ divise T. ■

Exercice 18.21 Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants :
$P_1 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $P_2 = X^4 + 1$, $P_3 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$. ■

Exercice 18.22 — (★) Polynômes positifs.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$
   (ii) $\exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2$.
2. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ P(x) \geqslant 0$
   (ii) $\exists (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + XB^2$.

■

Racines et coefficients

Exercice 18.23 Résoudre les systèmes d'équations suivants. On pourra utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

1. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=11 \\ xyz=6 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z| \end{cases}$ ■

Exercice 18.24 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On note $\mu(P) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{P(z)=0} z$ la moyenne des racines de P (Les racines multiples étant comptées multiplement).

1. Montrer que $\mu(P) = \mu(P')$.
2. Montrer que les sommes des zéros de P, P', ..., $P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

■

Divers

Exercice 18.25 — Polynômes de Lagrange. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts.

1. a. Montrer que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
$$L_k(a_j) = 0 \text{ pour } j \neq k, \text{ et } L_j(a_j) = 1.$$
   b. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et préciser les coordonnées d'un élément $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. On fixe $n = 2$. Expliciter les polynômes L_0, L_1 et L_2, ainsi que la décomposition du polynôme $P = 1 + X + X^2$ dans la base (L_0, L_1, L_2), lorsque :
   a. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.
   b. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$.

■

Exercice 18.26 — Polynômes de Tchebychev. On considère la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est appelé le n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce.)

1. Calculer les polynômes T_2 à T_5.
2. Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Montrer que T_n a la parité de n.
4. Donner les valeurs de $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, T_n\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right) = \dfrac{z^n+z^{-n}}{2}$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
7. Montrer que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et préciser ses racines et leur multiplicité.
8. Déterminer de même les racines de T_n'.

■

Exercice 18.27 — Une somme fameuse.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$.

1. Montrer que P est un polynôme pair, i.e. que P est de la forme $Q(X^2)$, où $Q \in \mathbb{C}[X]$. Déterminer le degré de Q, et expliciter ses deux termes de plus haut degré.
2. En utilisant l'expression des racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité, déterminer les racines de P.
3. En déduire que Q est scindé sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont les réels $\dfrac{-1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$.
5. Montrer que $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2 x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.
6. Montrer que $\sin x < x < \tan x$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
7. En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

■

Exercice 18.28 Soit P un polynôme réel scindé à racines simples. Montrer que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls. ■

Exercice 18.29 Soit $n \geqslant 1$ et $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, le polynôme $P^{(k)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. En étudiant la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x)P''(x) < P'(x)^2$.
3. En utilisant $P^{(k-1)}$, $P^{(k)}$ et $P^{(k+1)}$, montrer qu'on a $a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$ pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$.
(On retrouve en particulier le résultat de l'exercice précédent : P ne peut pas avoir deux coefficients nuls.)

■

Exercice 18.30 Soit P un polynôme réel scindé, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $P' + \alpha P$ est aussi un polynôme scindé. ■

Exercice 18.31 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux. On suppose que $P^2 + Q^2$ admet une racine double a. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$. ■

Exercice 18.32 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. Soit $a > 0$. Montrer que $P^2 + a^2$ n'a pas de racine réelle, et que ses racines complexes sont deux à deux distinctes. ■

Exercice 18.33 Déterminer S et T de degré 5 tels que $(1-X)^6 S + X^6 T = 1$. ■

Exercice 18.34 Soient a, b et c trois scalaires distincts non nuls. On pose :

$$A = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

Montrer que $A = 1 + \dfrac{1}{abc}(X-a)(X-b)(X-c)$. ■

Exercice 18.35 Soient $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + 3X - 4$ et $a = 1 + \sqrt[3]{2}$. Calculer $P(a)$. ■

Exercice 18.36 On considère $P = 1 + X + \dfrac{1}{2!}X^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}X^n$. Montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$. ■

Exercice 18.37 — (★). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que E est de dimension finie $n \geqslant 1$. Déterminer le cardinal de $\{\deg P,\ P \in E \setminus \{0\}\}$. ■

Exercice 18.38 Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^n + 1)P(X)$.
(On peut utiliser le résultat de l'exercice précédent.) ■

Exercice 18.39 Montrer que le nombre de racines distinctes de $P \in \mathbb{C}[X]$ vaut :

$$\deg(P) - \deg(P \wedge P')$$

■

Exercice 18.40 Trouver un polynôme à coefficients entiers ayant $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ pour racine. ■

Exercice 18.41 — (★★) Règle des signes de Descartes.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de Q. Montrer qu'il existe un intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$ (avec $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$) tel que, pour tout $h \in]-\varepsilon;\varepsilon[$, $Q(\alpha+h)Q'(\alpha+h)$ est du signe de h.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle $V(x)$ le nombre de changements de signes stricts dans le $n+1$-uplet $(P^{(k)}(x))_{0\leqslant k\leqslant n}$. Autrement dit, $V(x)$ est le cardinal de
$$\{(i,j) \in [\![0;n]\!]^2 \mid i<j \text{ et } P^{(i)}(x)P^{(j)}(x)<0 \text{ et } P^{(k)}(x)=0 \text{ pour tout } i<k<j\}$$
Exemple : Que vaut $V(0)$ si P est le polynôme $X^7+2X^6-3X^5-X^2+7X-8$?

3. Montrer que la fonction V est constante sur tous les intervalles ouverts ne contenant aucune racine des $P^{(k)}$, $k \in [\![0;n]\!]$.

4. Montrer que la valeur de V chute de m en une racine r d'un $P^{(k)}$, avec m égal à la multiplicité de r comme racine de $P^{(k)}$. (Autrement dit : $\lim\limits_{x\to r^-} V(x) - \lim\limits_{x\to r^+} V(x) = m$.)

5. En déduire que le nombre de racines de P dans un intervalle $[a;b]$ ($a<b$), comptées avec multiplicité, est majoré par $V(a)-V(b)$.

6. Montrer que si $P \neq 0$, le nombre de racines (comptées avec multiplicité) de P dans $\mathbb{R}_+$ est majoré par le nombre de changement de signes stricts dans la suite des coefficients de P.

7. Majorer le nombre de racines positives et négatives de $P(X) = X^7+2X^6-3X^5-X^2+7X-8$ et montrer sans calcul que P a au moins deux racines complexes non réelles.

■

Exercice 18.42 — (★★) Les poids lourds de l'algèbre.

Emmy Noether et David Hilbert jouent au jeu suivant. David a choisi en secret un polynôme $P \in \mathbb{N}[X]$ à coefficients entiers positifs. À chaque tour de jeu, Emmy donne un entier i et David répond en donnant la valeur $P(i)$. Emmy peut alors proposer un polynôme. Si elle a deviné le polynôme P, elle a gagné, sinon la partie continue.

1. Montrer qu'en s'y prenant bien, Emmy peut gagner en deux tours.

2. On suppose désormais que P est choisi dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, Emmy n'a aucune garantie de gagner en n tours.

3. Montrer qu'elle peut néanmoins gagner en un nombre fini de tours.

■