19. Déterminants

Permutations

Exercice 19.1

1. On définit la permutation de $[\![1;8]\!]$ suivante :
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Est-ce que σ_1 est un cycle ?
2. Montrer que $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est la composée de deux cycles à supports à disjoints.
3. Expliciter la permutation $\sigma_3 = (1\,2\,7\,4\,3) \circ (6\,4\,3\,5\,2) \circ (8\,1\,3\,7\,6)$ puis l'écrire comme composée de cycles à supports disjoints.
4. Même question avec $\sigma_4 = (1\,2\,4\,3) \circ (6\,4\,5\,2) \circ (8\,6\,3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.
5. Donner les signatures de σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4.

■

Exercice 19.2

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.
On appelle *ordre* de la permutation σ le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie cette propriété.
2. Calculer les ordres des permutations σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 de l'exercice précédent.

■

Exercice 19.3 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On appelle $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ l'ensemble des permutations paires de $[\![1,n]\!]$.

1. Montrer que A_n contient $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et est stable par composition et par inverse.
   (On dit que A_n est un sous-groupe de S_n)
2. Soit $\varphi : A_n \to S_n \setminus A_n$ définie par $\varphi(\sigma) = (1\,2) \circ \sigma$. Montrer que φ est bien définie et est une bijection de A_n sur $S_n \setminus A_n$.
3. En déduire $\mathrm{Card} A_n$.

■

Exercice 19.4 Soit σ une permutation de $[\![1;n]\!]$. On appelle *matrice de permutation* associée à σ la matrice $M_\sigma = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de format (n,n) et de coefficients

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les matrices de permutations sont exactement les matrices carrées vérifiant :
   — Tous les coefficients valent 0 ou 1.
   — Il y a exactement un 1 sur chaque ligne.
   — Il y a exactement un 1 sur chaque colonne.
2. Montrer que $M_\sigma M_\tau = M_{\sigma \circ \tau}$ pour tous σ, $\tau \in S_n$.
3. Pour $\sigma \in S_n$, montrer que ${}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$.
   Montrer aussi que M_σ est inversible d'inverse $M_\sigma^{-1} = {}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$.
4. Montrer enfin que $\det M_\sigma = \varepsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.

■

Calcul de déterminants

Exercice 19.5 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Calculer (si possible astucieusement) les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 56413 & 56513 \\ 29413 & 29513 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+3 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} a & \pi & 0 & e \\ 0 & b & 0 & 1543 \\ \sqrt{2} & i & c & 2019 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

■

Exercice 19.6 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a + bz + cz^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}, \text{ où } j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Calculer le produit AV. On fera apparaître sur chaque ligne les quantités $P(1)$, $P(j)$ et $P(j^2)$.
2. En déduire une factorisation de l'expression $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ dans $\mathbb{C}$.

■

Exercice 19.7 Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ lorsque :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$
2. $a_{i,j} = \max\{i, j\}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $a_{i,j} = a$ si $i = j$, et b sinon, où $a, b \in \mathbb{C}$.

■

Exercice 19.8 Calculer les déterminants suivants :

1. $d_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_{[n]}$
2. $e_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{vmatrix}_{[n]}$
3. $f_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$
4. $g_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$

■

Exercice 19.9 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles qui commutent.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$. ■

Utilisation des déterminants

Exercice 19.10 Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan usuel $\mathscr{P}$, dont les coordonnées dans un repère quelconque de $\mathscr{P}$ sont $\binom{x_1}{y_1}$, $\binom{x_2}{y_2}$ et $\binom{x_3}{y_3}$ respectivement. Montrer l'équivalence

$$\text{les points } M_1, M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

Exercice 19.11 Déterminer les conditions pour que les matrices suivantes soient inversibles :

a. $\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{c} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$

■

Exercice 19.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice antisymétrique $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ peut-elle être inversible ?
[On distinguera les cas n impair et n pair.] ■

Exercice 19.13 — Formules de Cramer. Soit $AX = B$ un système carré d'équations linéaires, où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $X, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note A_j la matrice déduite de A en remplaçant sa j-ème colonne par B. On pose $D = \det(A)$ et $D_j = \det(A_j)$ pour tout $j \in [\![1;n]\!]$.

1. a. Montrer que si $X = {}^t(x_1 \cdots x_n)$ est solution du système, alors $D_i = x_i D$.
   b. En déduire les **formules de Cramer**, qui donnent une expression de l'unique solution d'un système de Cramer à l'aide de déterminants.
2. Déterminer les valeurs des paramètres réels λ et m pour lesquels les systèmes suivants sont de Cramer. Le cas échéant, les résoudre à l'aide des formules de Cramer.
   a. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & \lambda y & - & z & = & 5 \\ (\lambda-5)x & + & 3y & + & 7z & = & 7 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \end{array} \right.$
   b. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array} \right.$

■

Exercice 19.14 Calculer le déterminant de l'endomorphisme de transposition des matrices $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. ■

Exercice 19.15 Les vecteurs suivants forment-ils une base de l'espace vectoriel considéré ?

a. $u=(1,3,2)$, $v=(1,2,-1)$ et $w=(0,1,3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b. $u=(1,-i,-1)$, $v=(i,1,-i)$ et $w=(-1,i,1)$ dans $\mathbb{C}^3$.

c. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$ dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

d. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

e. $P : x\mapsto x^2-3x+2$, $Q : x\mapsto x^2-4x+3$ et $R : x\mapsto x^2-5x+6$ dans $\mathscr{P}_2$.

f. $P : x\mapsto x^3+x^2+x$, $Q : x\mapsto x^3+x^2+1$, $R : x\mapsto x^3+x+1$ et $S : x\mapsto x^2+x+1$ dans $\mathscr{P}_3$.

■

Exercice 19.16 On considère, dans le plan usuel, trois droites D_i d'équations $a_ix+b_iy+c_i=0$, où $i\in[\![1;3]\!]$. Montrer que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0.$$

■

Exercice 19.17 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que l'application $x\mapsto\det(A-xI_n)$ est polynomiale et non nulle.
2. En déduire que $A-xI_n$ est inversible sauf pour un nombre fini de scalaires x.

■

Exercice 19.18 Soient $M=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-2&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M.

1. Déterminer les valeurs $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $M-\lambda I_3$ n'est pas inversible.
2. Pour chacune des valeurs déterminées à la question 1, expliciter une base de $\ker(f-\lambda\,\mathrm{Id})$.
3. En déduire une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

■

Exercice 19.19 Pour tout $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $f_A : \mathscr{M}_2(\mathbb{C})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $M\mapsto AM$.
Calculer le déterminant de f_A en fonction de celui de A.

■

Exercice 19.20 Soit Φ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $\Phi(P)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\Phi(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer le déterminant de Φ_n.
3. Montrer que Φ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

■

Encore des calculs de déterminant

Exercice 19.21 On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}_{[n]}$

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.
2. Montrer pour $n \geqslant 2$ la relation $\Delta_n = a\Delta_{n-1} + b^n$.
3. En déduire Δ_3 et Δ_4.
4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.
5. En distinguant les cas $a = b$ et $a \neq b$, donner une expression simplifiée de Δ_n.

■

Exercice 19.22 On se donne deux scalaires a et b, et n scalaires λ_1, λ_2, …, λ_n.

On définit la matrice (n,n) :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On appelle U la matrice (n,n) dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto \det(M + xU)$ est polynomiale de degré au plus 1.
2. Calculer la valeur prise par φ en deux valeurs de x bien choisies.
3. En déduire φ puis $\det M$.

■

Exercice 19.23 Soit $P = X^n - X + 1$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2).

1. Montrer que P possède dans $\mathbb{C}$ n racines distinctes $z_1, z_2, \dots, z_n$.
2. Calculer le produit des racines : $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$.
3. Calculer l'expression symétrique élémentaire de degré $n-1$ des racines : $\sigma_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} z_i$.
4. On appelle $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de coefficients $\begin{cases} a_{ii} = 1 + z_i \\ a_{ij} = 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

   Calculer $\det A$.

■

Exercice 19.24 — Déterminant par blocs. Soient A, B, C et D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose que D est inversible. Montrer qu'alors

$$\det \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array} \right) = \det(AD - BD^{-1}CD)$$

2. On suppose que D est inversible et que C et D commutent. Montrer qu'on a

$$\det \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array} \right) = \det(AD - BC)$$

3. On suppose toujours que C et D commutent, mais D n'est plus nécessairement inversible. Montrer que l'égalité précédente reste néanmoins vraie.

■

Exercice 19.25 — Résultant de deux polynômes. Soient $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes à coefficients complexes, de degrés respectifs m et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **résultant** de P et Q, noté $\operatorname{res}(P,Q)$, le déterminant de la matrice carrée $M_{P,Q}$ suivante :

$$M_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & & \ddots & b_0 \\ a_m & & & a_1 & b_n & & & b_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ de la famille de polynômes $(P, XP, X^2P, \dots, X^{n-1}P, Q, XQ, X^2Q, \dots, X^{m-1}Q)$. Cette matrice $M_{P,Q}$ est carrée de taille $m+n$, ses n premières colonnes sont relatives à P, et ses m dernières relatives à Q.

1. Cas particulier où $m = n = 2$.

On suppose dans cette question que $m = n = 2$ et que $\begin{cases} P = X^2 + a_1X + a_0 \\ Q = X^2 + b_1X + b_0 \end{cases}$

a. Montrer que $\mathrm{res}(P,Q) = (a_0 - b_0)^2 + (b_1 - a_1)(a_0b_1 - a_1b_0)$.

b. On note β_1 et β_2 les deux racines (éventuellement confondues) de Q.
Vérifier que $P(\beta_1) \times P(\beta_2) = \mathrm{res}(P,Q)$. En déduire la caractérisation suivante :

$$\mathrm{res}(P,Q) = 0 \iff P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune.}$$

2. Généralités sur le résultant.
En utilisant les propriétés du déterminant :

a. Calculer $\mathrm{res}(P,P)$.

b. Expliciter, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathrm{res}(\lambda P,Q)$ et $\mathrm{res}(P,\lambda Q)$ en fonction de $\mathrm{res}(P,Q)$.

c. Justifier que $\mathrm{res}(Q,P)$ est égal à $\mathrm{res}(P,Q)$ ou $-\mathrm{res}(P,Q)$
Justifier plus précisément que $\mathrm{res}(Q,P) = (-1)^{mn}\,\mathrm{res}(P,Q)$.

3. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ est $M_{P,Q}$. Par définition, on a donc $f(X^k) = X^kP$ pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, et $f(X^{n+j}) = X^jQ$ pour tout $j \in [\![0;m-1]\!]$.
On remarquera que tout polynôme $R \in \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ s'écrit $R = U + X^nV$, où $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ (en mettant X^n en facteur dans les termes de degré $\geqslant n$ de R, ou en effectuant la division euclidienne de R par X^n).

a. Soient $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Montrer que $f(U + X^nV) = PU + QV$.
[On pourra écrire $U = \sum_{k=1}^{n-1} c_kX^k$ et $V = \sum_{j=0}^{m-1} d_jX^j$, et profiter de la linéarité de f.]

b. On suppose ici que P et Q ont une racine commune $a \in \mathbb{C}$.
Justifier qu'il existe P_1 et $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $P = (X-a)P_1$ et $Q = (X-a)Q_1$.
Calculer $f(Q_1 - X^nP_1)$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?

c. On suppose ici que P et Q n'ont aucune racine commune. Soit $R \in \mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ écrit sous la forme $R = U + X^nV$, où $U \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $V \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. On suppose que $f(R) = 0$.
Montrer qu'alors toutes les racines de P sont des racines de V. En déduire que $V = 0$, puis que $U = 0$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité de f ?

d. À l'aide des questions précédentes, montrer la caractérisation suivante :

$$\mathrm{res}(P,Q) = 0 \iff P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune.}$$

4. Discriminant d'un polynôme.
Si P est de degré $m \geqslant 2$, on appelle **discriminant** de P le scalaire $\Delta(P) = \dfrac{-1}{a_m}\,\mathrm{res}(P,P')$.

a. Vérifier que dans le cas $m = 2$, cette notion coïncide avec le discriminant de P bien connu.

b. À l'aide de **3d**, montrer que $\Delta(P) = 0$ si et seulement si P a au moins une racine multiple.

c. Quel est le discriminant du polynôme de degré trois $X^3 + pX + q$?