20. Séries numériques

Techniques

Exercice 20.1 Déterminer la nature des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n^2+1}$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}$

c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin n$

f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{n}} \ln n$

g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{1}{n}$

h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

j. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$

k. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right)$

l. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$

m. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

n. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\arccos\left(1-{}^1\!/_n\right) - \sqrt{{}^2\!/_n}\right)$

Exercice 20.2 Démontrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$

e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$

f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\operatorname{ch}(n)\operatorname{ch}(n+1)}$

g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$

h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$

i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$

Exercice 20.3 Déterminer la nature des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)^n$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ ■

Séries alternées

Exercice 20.4 — Le « critère spécial » des séries alternées. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes réels positifs, décroissante et tendant vers 0. On recherche la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.

1. Si S_n désigne la somme partielle d'indice n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$, que dire de la monotonie de la suite (S_{2n}) ?
2. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.
4. *Application :* Discuter selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

■

Exercice 20.5 À l'aide d'un développement limité et du critère spécial des séries alternées, déterminer la nature des séries suivantes :

a. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n+\sin^2 n)}$ b. $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ c. $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)$ ■

Problèmes de convergence

Exercice 20.6 Déterminer tous les couples (a,b) de réels tels que la série suivante converge :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)\right)$$

■

Exercice 20.7 Trouver un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont la suite des sommes partielles est bornée. ■

Exercice 20.8 Calculer la limite (si elle existe...) de la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

■

Exercice 20.9 — Séries de Bertrand. Soit la série de terme $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. a. Montrer que si $\alpha < 1$ (resp. $\alpha > 1$), alors $\dfrac{1}{n} = \underset{+\infty}{o}(u_n)$ (resp. $u_n = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$).

   b. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ lorsque $\alpha < 1$ (resp. $\alpha > 1$).

2. On suppose désormais $\alpha = 1$.

   a. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geqslant 2$ tel que

$$\int_{n_0+1}^{p+1} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{p} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leqslant \int_{n_0}^{p} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,\mathrm{d}x$$

   b. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ lorsque $\beta \leqslant 1$ (resp. $\beta > 1$).

3. En résumé : quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier le couple (α, β) pour que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ?

■

Exercice 20.10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 0$ si n comporte un 9 dans son écriture décimale, et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ sinon. Le but de l'exercice est de déterminer la nature de la série $\sum u_n$. On note S_n sa somme partielle d'ordre n.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'encadrement $\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{9}{10^\alpha}\right)^k \leqslant \displaystyle\sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} u_n \leqslant 8\left(\dfrac{9}{10^\alpha}\right)^{k-1}$.

   [Remarquer que les entiers de $[\![10^{k-1}; 10^k - 1]\!]$ qui ne comportent pas de 9 dans leur écriture décimale sont au nombre de $8 \times 9^{k-1}$.]

2. En déduire la nature de la suite $(S_{10^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, en fonction de α, puis conclure.

■

Exercice 20.11 Soient $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs, et R_n son reste d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k + (n+1)R_n = \sum_{k=0}^{n} R_k$.

   [On pourra exprimer u_k à l'aide des restes R_{k-1} et R_k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.]

2. Montrer que les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature, et ont même somme en cas de convergence.

■

Série harmonique

Exercice 20.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Redémontrer l'existence d'un réel γ tel que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
2. Déterminer un équivalent de $S_n - \ln n - \gamma$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Exprimer T_n à l'aide de termes de la suite (S_n).

   En déduire que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ (la série harmonique alternée) converge et donner sa somme.

■

Exercice 20.13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$.

1. Montrer qu'il existe un réel C tel que $S_n = \ln n + C + o(1)$.
2. Déterminer un équivalent de $S_n - \ln n - C$.

■

Études asymptotiques

Exercice 20.14 Le but de l'exercice est d'étudier la série $\sum \frac{\ln n}{n}$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Quelle est la nature de cette série ?

   b. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
2. a. Montrer que pour $n \geqslant 3$, on a $\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln 2}{2} \leqslant S_n \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$.

   b. En déduire un équivalent simple de S_n en $+\infty$.
3. Le but de cette question est de démontrer l'existence d'un réel c tel que $S_n = \frac{\ln^2 n}{2} + c + \underset{+\infty}{o}(1)$.

   a. Montrer que $\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$.

   b. On pose $u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n - \ln^2(n-1)}{2}$ pour $n \geqslant 2$.

   Montrer que $\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$. Conclure.

■

Exercice 20.15 Trouver un développement asymptotique à deux termes de la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. ■

Exercice 20.16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^5}$.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
2. Déterminer un réel α tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}$ converge vers un réel β non nul.
3. En déduire que $u_n \sim (\beta n)^{1/\alpha}$.

■

Exercice 20.17 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \,]0;\pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow 0$.
2. En s'inspirant des questions 2 et 3 de l'exercice précédent, trouver un équivalent de (u_n).

■

Exercice 20.18 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Rechercher un équivalent de (u_n) en reprenant les méthodes des exercices précédents. ■

Exercice 20.19 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur le polynôme P pour que la série de terme général $u_n = (n^4 + 3n^2)^{1/4} - (P(n))^{1/3}$ soit convergente. ■

Exercice 20.20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - \ell$?

■

Formule de Stirling

Exercice 20.21 Déterminer un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to +\infty$. ■

Exercice 20.22 Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{n!e^n}$? ■

Manipulation des termes d'une série

Exercice 20.23 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature. ■

Exercice 20.24 Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, comparer $\sqrt{xy}$ et $x+y$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge également.
3. La réciproque est-elle vraie ?

■

Exercice 20.25 Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge également.
2. Cette propriété est-elle encore vérifiée si (u_n) n'est pas à termes positifs ?

■

Exercice 20.26 Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, à termes strictement positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes.

1. Montrer que $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
2. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3. Montrer que $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge.

■

Exercices avancés...

Exercice 20.27 — Test de condensation de Cauchy (★).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

1. Démontrer l'équivalence :
$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} 2^n u_{2^n} \text{ converge } \textit{(Cette série est appelée série condensée).}$$
On pourra poser $A_n = \sum_{k=0}^{2^n} u_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}$ et comparer A_n et B_n.
2. Calculer la série condensée d'une série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$, puis la série condensée d'une série de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
Retrouver les critères de convergence des séries de Riemann et de Bertrand.
3. Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 1} \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ diverge aussi.

■

Exercice 20.28 — (★). Soit $\theta \in \,]0;2\pi[$. On souhaite calculer explicitement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

Pour $\theta \in \,]0;2\pi[$ et $n \geqslant 1$, on pose $S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ et $f_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

1. Justifier l'existence de la dérivée de la fonction $\theta \mapsto S_n(\theta)$.
Exprimer $S_n'(\theta)$ en fonction de $f_n(\theta)$.
2. Calculer explicitement la somme $f_n(\theta)$.
3. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-e^{it}}$.
4. Montrer que pour toute fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a;b]$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi(t) e^{int} \, \mathrm{d}t = 0$$
5. Combien vaut $\lim_{n\to+\infty} S_n(\pi)$?
6. Finalement, en considérant l'intégrale $\int_\theta^\pi f_n(t) \, \mathrm{d}t$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

■

Exercice 20.29 — (★). Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels, qu'on suppose semi-convergente.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = x$.
2. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = +\infty$.

■

Exercice 20.30 — (★). Étudier la nature de la série suivante :

$$\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$$

■

Exercice 20.31 — (★). Étudier la nature de la série suivante :

$$\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$$

■

Exercice 20.32 — (★). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \; - n u_n$$

On suppose que la suite (v_n) est bornée. Montrer qu'alors la série $\sum u_n$ converge.

■

Exercice 20.33 — (★). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge. On note R_n le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Étudier la nature des séries $\sum \frac{u_n}{R_n}$ et $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$.

■