21. Espaces euclidiens

Généralités

Exercice 21.1 Déterminer si les applications suivantes définissent un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' + \alpha(xy' + yx') + yy'$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.
3. $E = \mathscr{C}^0([-1;1],\mathbb{R})$ et $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.

■

Exercice 21.2 Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tous vecteurs $u, v \in E$, on a l'inégalité $||u+v||\,||u-v|| \leqslant ||u||^2 + ||v||^2$. Étudier le cas d'égalité. ■

Exercice 21.3 Soit $V = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur V.
2. Vérifier que la base canonique de V est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Déterminer l'orthogonal de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

■

Exercice 21.4 Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Montrer l'égalité

$$\left\| \frac{1}{||x||^2}x - \frac{1}{||y||^2}y \right\| = \frac{||x-y||}{||x||\,||y||}$$

■

Exercice 21.5 Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application surjective (qui n'est pas a priori supposée linéaire) vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Montrer que f est linéaire. ■

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 21.6 Soient $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + x_2 + \dots x_n = 1$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$. Quand a-t-on égalité ? ■

Exercice 21.7 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans des espaces préhilbertiens bien choisis, montrer les inégalités suivantes en précisant le cas d'égalité :

1. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant \sqrt{n}\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.
3. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathrm{tr}(A))^2 \leqslant n\,\mathrm{tr}({}^tAA)$.
4. $\forall f \in \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R}_+^*)$, $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant (b-a)^2$, où $a < b$.

■

Exercice 21.8 Pour $f, g \in E = \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$, on pose $\displaystyle\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi défini est un produit scalaire sur E.
2. En déduire que $\forall f \in E$, $|f(1)| \leqslant \sqrt{2}\displaystyle\sqrt{(f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t}$.

■

Orthogonalité

Exercice 21.9 On pose $u_1 = (0,1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1,1)$, $u_3 = (1,1,0,1)$ et $u_4 = (1,1,1,0) \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser cette base pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

■

Exercice 21.10 On munit $\mathbb{R}_4[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier qu'on a bien défini un produit scalaire.
2. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2, X^3, X^4)$.

■

Exercice 21.11 Soit E un espace préhilbertien réel et u, $v \in E$. Montrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|u+\lambda v\| \geqslant \|u\|$$

■

Exercice 21.12 Soit E un espace préhilbertien réel et soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs normés de E qui vérifie : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2$.

1. Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est orthonormée.
2. Montrer que $\forall x \in E,\ \left\| x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i \right\|^2 = 0$.
3. En déduire que E est de dimension finie et en donner une base orthonormée.

■

Exercice 21.13 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on pose $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ pour P, $Q \in E$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi défini est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) de E telle que $\deg P_i = i$ pour $i \in [\![0, 2]\!]$.

■

Projections, symétries orthogonales

Exercice 21.14 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une projection orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. ■

Exercice 21.15 On considère le sous-espace $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = y - z + t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ adaptée à F et $F^\perp$.
3. Déterminer les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

■

Exercice 21.16 On considère, dans $\mathbb{R}_3[X]$, la partie $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer l'orthogonal de H, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur H et de la symétrie orthogonale par rapport à H.
4. Calculer la distance de X à H.

■

Exercice 21.17 On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la forme bilinéaire définie par $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que cette forme bilinéaire est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal, pour ce produit scalaire, de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire la valeur de $\inf\left\{\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

■

Exercice 21.18 Soit P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Déterminer les matrices, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P. ■

Isométries vectorielles

Exercice 21.19 Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{lll} (i) & \forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle & (f \text{ conserve le produit scalaire}) \\ (ii) & \forall x\in E,\ \|f(x)\| = \|x\| & (f \text{ est une isométrie}) \end{array}$$

■

Exercice 21.20 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et f une isométrie de E vérifiant $f(F)\subset F$.

1. Montrer que $f(F) = F$.
2. Montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.

■

Exercice 21.21 Soit E un espace euclidien, a un vecteur de E de norme 1 et α un réel.
On définit l'endormorphisme f_α de E par :

$$\forall x\in E,\ f_\alpha(x) = x+\alpha\langle x,a\rangle a$$

1. Montrer que $G = \{f_\alpha \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$ est stable pour la loi $\circ$.
2. Montrer que f_α et f_β commutent, quelque soient α, $\beta\in\mathbb{R}$.
3. Calculer f_α^n, pour $n\in\mathbb{N}$.
4. Montrer que f_α est bijective si et seulement si $\alpha\neq -1$.
   Décrire f_{-1}.
5. Montrer que f_α est une isométrie si et seulement si $\alpha\in\{0, -2\}$.
   Décrire f_{-2}.

■

Exercice 21.22 Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne usuelle) canoniquement associé à la matrice

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

■

Un peu de géométrie affine

Exercice 21.23 Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de la droite définie par $\begin{cases} 2x-3y+z=917 \\ x-4y+2z=329 \end{cases}$ et du plan d'équation $x+y-z=1024$. ■

Exercice 21.24 À quelle condition simple le sous-espace affine $V=a+F$ est-il un sous-espace vectoriel ? ■

Exercice 21.25 Soient $V=a+F$ et $W=b+G$ deux sous espaces affines d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que $V\cap W\neq\varnothing \Leftrightarrow b-a\in F+G$ ■

Exercice 21.26 Dans $\mathbb{R}^2$, soient $D_1 : x+y=2$ et $D_2 : x-2y=256$. Donner l'expression analytique (dans le repère canonique) de la projection sur D_1 parallèlement à D_2. ■

Familles de polynômes orthogonaux

Exercice 21.27 — (Polynômes de Legendre). On pose $E=\mathbb{R}[X]$ et on munit E du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=(X^2-1)^n$ et $L_n=\dfrac{1}{2^n n!}P_n^{(n)}$.
   a. Déterminer L_0, L_1, L_2, L_3 et L_4.
   b. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée en degré puis qu'elle est une base de E.
   c. Pour $n\in\mathbb{N}$, quel est le coefficient dominant de L_n ?
   d. Étudier la parité de L_n.
   e. En exprimant L_n à l'aide de la formule de Leibniz, donner les valeurs de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
   f. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, L_n est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans $]-1;1[$.
2. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle L_n,Q\rangle=0$.
   b. En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
   c. Calculer $\|L_n\|$ pour $n\in\mathbb{N}$.

■

Divers

Exercice 21.28 — Une construction du produit vectoriel. On se place dans $E=\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la base canonique $\mathscr{B}$ usuels.

1. Pour $w\in E$, on note $\varphi_w : E\to\mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $\varphi_w(x)=\langle x,w\rangle$.
   Montrer que $\Phi : w\mapsto\varphi_w$ est un isomorphisme de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
2. En déduire que pour tous vecteurs u, $v\in E$, il existe un unique vecteur w de E qui vérifie
   $$\forall x\in E,\ \langle w,x\rangle=\det_{\mathscr{B}}(u,v,x)$$
   Ce vecteur w sera noté $u\wedge v$, et on a ainsi définie une loi $\wedge : E^2\to E$ qui vérifie, pour tous vecteurs u, v et x : $\langle u\wedge v,x\rangle=\det_{\mathscr{B}}(u,v,x)$.
3. Montrer les propriétés suivantes du produit vectoriel :
   a) Si u et v sont colinéaires alors $u\wedge v=0$.
   b) Si (u,v) est libre alors $u\wedge v\neq 0$ et $(u,v,u\wedge v)$ est une base orientée dans le sens direct.
   c) $u\wedge v$ est orthogonal à u et à v.
   d) $\wedge$ est bilinéaire.
   e) $\wedge$ est anticommutative (c'est-à-dire $v\wedge u=-u\wedge v$).
   f) La norme de $u\wedge v$ est égale à $\|u\|\,\|v\|\,|\sin\theta|$ où θ est l'angle entre les vecteurs u et v.
   g) On a l'identité $\langle x\wedge y,z\rangle=\langle y\wedge z,x\rangle=\langle z\wedge x,y\rangle$.
4. Pour $u=(a,b,c)$ et $v=(a',b',c')\in E$, déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de $u\wedge v$.
5. Cette construction du produit vectoriel est-elle adaptable à un espace de dimension différente de 3 ?

■

Exercice 21.29 — Un espace pas très euclidien. On se place dans $E=\mathbb{R}^4$. Pour $u=(x,y,z,t)$ et $v=(x',y',z',t')\in E$, on note $\varphi(u,v)=xx'+yy'+zz'-tt'$.

1. Montrer que $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique. Est-elle définie positive ?
2. Pour $u\in E$, on note $N(u)=\varphi(u,u)$.
   Décrire géométriquement l'ensemble des u tels que $N(u)=0$, tels que $N(u)>0$ puis tels que $N(u)<0$.
3. Soit $v\in\,]-1;1[$. On note $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ et on appelle f_v l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice :
   $$\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -v\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -v\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$
   Montrer que $N(f(u))=N(u)$ pour tout $u\in E$.
4. Montrer que pour v_1, $v_2\in\,]-1;1[$ on a $f_{v_1}\circ f_{v_2}=f_{v_3}$ où $v_3=\dfrac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$.

■