22. Espaces probabilisés finis

Calculs de probabilités

Exercice 22.1 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. un double ?
2. une somme des deux dés égale à 9 ?
3. un minimum des deux dés égal à 4 ?
4. au moins un 6 ?

■

Exercice 22.2 Une urne contient 20 boules : 5 blanches, 5 rouges et 10 noires.

1. On tire successivement, et avec remise entre chaque tirage, 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité que le tirage soit :
   a. tricolore
   b. bicolore
   c. unicolore.
2. Mêmes questions si l'on tire cette fois les trois boules simultanément.

■

Exercice 22.3 On lance deux fois de suite un dé équilibré à 6 faces. On définit les événements :

A : le premier lancer amène un chiffre pair.
B : le deuxième lancer amène un chiffre impair.
C : l'un des deux lancer amène un chiffre pair, l'autre un chiffre impair.

1. Montrer que les événements A et B (resp. A et C, resp. B et C) sont indépendants.
2. Les événements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

■

Exercice 22.4 On lance n fois une pièce non truquée. On définit les événements :

A_n : on obtient, au cours des n lancers, des PILE et des FACE.

B_n : on obtient, au cours des n lancers, au plus un PILE.

1. Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Étudier l'indépendance des événements A_2 et B_2, puis des événements A_3 et B_3.
3. Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n dans le cas général.

■

Probabilités conditionnelles

Exercice 22.5 Une urne contient 5 boules bleues et 4 boules vertes. On tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules bleues et 2 boules vertes, dans cet ordre. ? ■

Exercice 22.6 On dispose de trois urnes $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ et $\mathscr{U}_3$ contenant chacune initialement 2 boules noires et 3 boules blanches. On prend une boule dans $\mathscr{U}_1$, une boule dans $\mathscr{U}_2$, puis on les place dans $\mathscr{U}_3$. On prend alors une boule dans $\mathscr{U}_3$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir tiré 3 boules noires ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche de $\mathscr{U}_3$?
3. On a obtenu une boule blanche dans $\mathscr{U}_3$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu des boules blanches dans $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$?

■

Exercice 22.7 On dispose de n urnes $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_n$, où $n \geqslant 2$, l'urne $\mathscr{U}_i$ contenant i boules bleues et $n-i$ boules vertes. On choisit une urne au hasard, et on y tire, successivement et avec remise, deux boules.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules bleues ?
2. On a tiré deux boules bleues. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $\mathscr{U}_i$?

■

Exercice 22.8 On tire à l'aveugle une allumette dans une boîte en contenant p petites, m moyennes et ℓ longues (où $m, p, \ell \in \mathbb{N}$ et $\ell + p \neq 0$). Si l'on en tire une longue, on gagne ; si l'on en tire une petite, on perd ; et si l'on en tire une moyenne, on la jette en on recommence l'opération.

On note p_m la probabilité de gagner le jeu lorsque la boîte contient m allumettes moyennes au départ.

1. Calculer p_0 et p_1.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, exprimer p_{m+1} en fonction de p_m.
3. En déduire que la probabilité de gagner le jeu est indépendante de m.

■

Exercice 22.9 Une puce se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC, de la façon suivante :

- à l'instant 0, elle se trouve en A.
- entre les instants n et $n+1$, soit elle reste immobile, et ceci avec une probabilité de $2/3$, soit elle saute sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun des deux sommets.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n (resp. B_n, resp. C_n) : la puce se trouve en A (resp. B, resp. C) à l'instant n, et la probabilité $a_n = P(A_n)$ (resp. $b_n = P(B_n)$, resp. $c_n = P(C_n)$).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_n + b_n + c_n$.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   [On pourra commencer par considérer les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou penser à une méthode de calcul de puissance de matrice.]

■

Synthèse

Exercice 22.10 Deux joueurs A et B tirent sur une cible. La probabilité que A atteigne sa cible est $1/4$, et pour B, elle est de $1/3$. Les différents tirs sont indépendants les uns des autres.

1. A et B tirent chacun deux fois. Quell est la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois ?
2. A et B tirent chacun une fois, la cible est atteinte une fois et une seule. Quelle est la probabilité que ça soit par A ?

■

Exercice 22.11 Deux pièces de monnaies déséquilibrées amènent pile avec des probabilités respectives de p et q (p, $q \in \,]0;1[$). Au départ, on choisit une des deux pièces au hasard. On joue infiniment à pile ou face avec la règle suivante : si on obtient pile, on garde la même pièce. Si on obtient face, on change de pièce.

1. Quelle est la probabilité qu'on joue le deuxième lancer avec la pièce 1 ?
2. Sachant qu'on a joué le 2^{e} lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le 4^{e} lancer avec la pièce 2 ?
3. On joue le 2^{e} lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
4. Quelle est la probabilité de jouer le n-ième lancer avec la pièce 1 ?

■

Exercice 22.12 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une série de tirages sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k boules blanches lors de n tirages ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée le soit au n-ième tirage ? (temps d'attente de la première boule blanche)
3. Déterminer de la même façon la loi du temps d'attente de la k-ième boule blanche ($k \in [\![1,b]\!]$).

■

Exercice 22.13 — (★). Deux joueurs A et B jouent avec une probabilité p que A gagne et $1-p$ que B gagne (avec $p \in \,]0;1[$). Celui qui perd donne un euro au gagnant. Ils répètent ce jeu jusqu'à ce qu'un des deux joueurs soit ruiné. Leurs capitaux initiaux respectifs sont a et b ($\in \mathbb{N}^*$).

1. Quelle est la probabilité que A soit ruiné ?
2. Quelle est la limite de la probabilité précédente lorsque b tend vers $+\infty$? Comment interpréter ce résultat ?
3. Montrer que le jeu d'arrête presque sûrement.

■

Exercice 22.14 — (★). On lance deux fois un dé à 6 faces déséquilibré. On note :

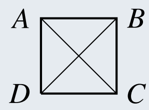
- A_i l'événement « On obtient i au premier lancer », pour $i \in [\![1,6]\!]$.
- B_i l'événement « On obtient i au deuxième lancer », pour $i \in [\![1,6]\!]$.
- C_i l'événement « La somme des deux lancers vaut i », pour $i \in [\![2,12]\!]$.

On note aussi $a_i = P(A_i) = P(B_i)$ pour $i \in [\![1,6]\!]$, et $c_i = P(C_i)$ pour $i \in [\![2,12]\!]$.

En trouvant une relation entre les polynômes $U = \sum_{i=1}^{6} a_i X^i$ et $V = \sum_{i=2}^{12} c_i X^i$, montrer qu'il n'est pas possible qu'un dé soit équilibré de telle sorte que la somme des résultats de deux lancers successifs indépendants donne équiprobablement les entiers de 2 à 12.

■

Exercice 22.15 — (★). On se déplace sur les quatre sommets d'un carré $(ABCD)$. Au pas 0, on est en A. À chaque étape, on peut aller sur un sommet adjacent à celui sur lequel on se trouve, ou sur le sommet opposé. Les déplacements verticaux ont une probabilité p de se produire, les déplacements horizontaux une probabilité q, et les déplacements en diagonale une probabilité r (avec $p+q+r=1$). Déterminer la probabilité de se retrouver en A, B, C ou D au n-ième pas.



Variables aléatoires

Exercice 22.16 Un charlatan a fabriqué un dé à 6 faces truqué de sorte que, pour tout $k \in [\![1;6]\!]$, la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. On lance ce dé et on note X la variable aléatoire donnant le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22.17 Une boîte à bonbons contient 5 bonbons, dont 2 au poivre. Un garnement y pioche des bonbons au hasard et les mange, jusqu'à manger le premier bonbon au poivre. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonbons mangés par le garnement.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Même question pour la variable aléatoire Y donnant le nombre de bonbons restant dans la boîte après le passage du garnement.

Exercice 22.18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 22.19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules vertes et 20 boules rouges. On y effectue n tirages avec remise, et on note X le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)$.

■

Exercice 22.20 On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, où $n \geqslant 2$. À partir du second lancer, on appelle *retournement* le fait d'obtenir un côté différent du côté obtenu au lancer précédent. Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de retournements obtenus.

1. Déterminer les lois de X_2 et X_3, puis calculer leur espérance et leur variance.
2. Justifier que X_n prend ses valeurs dans $[\![0;n-1]\!]$. Calculer $P(X_n=0)$ et $P(X_n=n-1)$.
3. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Montrer que $P(X_{n+1=k}) = \frac{1}{2}P(X_n=k)+\frac{1}{2}P(X_n=k-1)$.
4. On note, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X_n=k)x^k$.
   a. Calculer $Q_n(1)$. Exprimer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ en fonction de $Q_n'(1)$ et $Q_n''(1)$.
   b. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_{n+1}(s) = \frac{1+x}{2}Q_n(x)$.
   En déduire une expression de $Q_n(x)$ en fonction de n et x.
   c. Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, l'espérance et la variance de X_n.

■

Exercice 22.21 Soit $N \geqslant 3$. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On tire les jetons au hasard et sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit inférieur au numéro précédemment tiré ou que l'urne soit vide. On note X_N la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.

1. Calculer, pour $k \in [\![1;N-1]\!]$, la probabilité $P(X_N > k)$. En déduire la loi de X_N.
   [On pourra prendre pour univers Ω l'ensemble des permutations de $[\![1;N]\!]$.]
2. Calculer l'espérance de X_N. Quelle est la limite de $E(X_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$?

■

Exercice 22.22 On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$). On note X le nombre de pile obtenus, et $F = \frac{X}{n}$ leur fréquence.

1. Expliciter l'espérance et la variance des variables aléatoires X et F.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, que la fréquence des piles obtenus diffère de $\frac{1}{2}$ de moins de 5%.

■

Exercice 22.23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire sans remise dans une urne contenant n boules noires et n boules blanches, jusqu'à ce qu'on ait obtenu toutes les boules noires. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi et l'espérance de X ? ■

Entraînement aux dénombrements

Exercice 22.24 — Classique.... On tire 8 cartes (non ordonnées) dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent les 4 as ?
3. Combien de tirages contiennent au moins un cœur et une dame ?
4. Combien de tirages ne contiennent pas plus de deux couleurs ?
5. Combien de tirages contiennent exactement quatre carreaux dont le roi ?
6. Combien de tirages ne contiennent pas de cœur ?
7. Combien de tirages contiennent au plus trois piques ?

■

Exercice 22.25 Soit $p \in [\![2;n]\!]$. Combien y a-t-il de p-cycles dans S_n ? ■

Exercice 22.26 On considère un polygône régulier $A_1A_2\ldots A_n$ à n sommets. Chaque côté et chaque diagonale de ce polygône est colorié en bleu ou en rouge.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. On se place dans le cas d'un hexagone ($n = 6$). Montrer qu'il existe à partir de A_1 trois segments de même couleur.
3. En déduire qu'il existe un triangle unicolore.
   En déduire aussi que : *Dans un ensemble de six personnes, il y a toujours un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement, ou un groupe de trois personnes dans lequel personne ne se connaît.*
4. Montrer que ce résultat tombe en défaut pour $n = 5$.

■

Exercice 22.27 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1;n+1]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$? ■

Exercice 22.28 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1;n+2]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$? ■

Retour aux variables aléatoires

Exercice 22.29 Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![0;N]\!]$. Démontrer :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n)$$

■

Exercice 22.30 Soit X une variable aléatoire. Montrer que $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$. Que dire du cas d'égalité ? ■

Exercice 22.31 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Calculer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$. ■

Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 22.32 Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \geqslant 0,\ P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(f(|X|))}{g(a)}$$

■

Exercice 22.33 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

■

Exercice 22.34 Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Montrer

$$P(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

■

Exercice 22.35 Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart-type σ. En introduisant la variable aléatoire $Y = [\alpha(X-\mu)+\sigma]^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a

$$P(X \geqslant \mu + \alpha\sigma) \leqslant \frac{1}{1+\alpha^2}$$

■