# 23. Couples de variables aléatoires

### Retour sur la loi binomiale

**Exercice 23.1** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0;1[$. Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on note $b(k,n,p) = P(X=k)$.

1. Pour quelle valeur $m$ de $k$ le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?
2. Étudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0;1]$.
3. Vérifier que si $m \in [np;(n+1)p]$ alors
$$b\left(m,n,\frac{m}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m,n,\frac{m}{n}\right)$$
4. Proposer un encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p-1;np]$.
5. En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de $b(m,n,p)$.

■

**Exercice 23.2** La variable aléatoire $X$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Quelle est la loi de $Y = n - X$ ? ■

### Couples de variables aléatoires, lois

**Exercice 23.3** On tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 boules bleues ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$). On note $X$ le rang d'apparition de la première boule bleue et $Y$ le rang d'apparition de la seconde.

1. Préciser la loi marginale de $X$, la loi du couple $(X,Y)$ et en déduire la loi marginale de $Y$.
2. Soit $k \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y=k]$.
3. Soit $k \geqslant 1$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y-k$ sachant $[X=k]$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

■

**Exercice 23.4** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles. Montrer que

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma_X \sigma_Y$$

■

### Indépendance

**Exercice 23.5** Soit $n \geqslant 2$. On dispose de $n$ urnes $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_n$. Pout tout $k \in [\![1;n]\!]$, l'urne $\mathscr{U}_k$ contient $k$ jetons numérotés de 1 à $k$. On choisit une urne au hasard, puis on tire un jeton dans cette urne. On note $X$ le numéro de l'urne choisie et $Y$ le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer la loi de $X$. Calculer son espérance.
2. Expliciter la loi conjointe de $X$ et $Y$.
3. En déduire que pour tout $\ell \in [\![1;n]\!]$, $P(Y=\ell) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{k}$.
4. Calculer l'espérance de $Y$.
5. Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

■

**Exercice 23.6** Soient $A$ et $B$ deux événements. Montrer que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices $\chi_A$, $\chi_B : \Omega \to \{0,1\}$ sont des variables aléatoires indépendantes. ■

**Exercice 23.7** On considère dans cette exercice des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Pour $X$ une telle variable aléatoire, on note $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right)$$

1. Vérifier que $\varphi_X$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $2\pi$-périodique.
2. Calculer $\varphi_X(0)$. Comment interpréter $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$ ?
3. Calculer $\varphi_X$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$ puis lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
4. Soit $X$ une variable aléatoire réelle et $k$ un entier. Vérifier l'égalité :

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)e^{-iuk}\,\mathrm{d}u$$

   En déduire $\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow X$ et $Y$ ont la même loi.
5. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

■

**Exercice 23.8** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes. Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ? ■

**Exercice 23.9** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. À quelle condition les variables aléatoires $X$ et $f(X)$ sont-elles indépendantes ? ■

### Indépendance : calculs de lois

**Exercice 23.10** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres $p$ et $q$. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X,Y)$. ■

**Exercice 23.11** $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et telles que $P(X=i, Y=j) = \lambda i j$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

1. Que vaut nécessairement la constante $\lambda$ ?
2. Donner la loi de $X$ et calculer $E(X)$ et $V(X)$. Même question pour la variable $Y$.
3. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.
5. Calculer la loi de $U = \max(X,Y)$.

■

**Exercice 23.12** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n$ variables aléatoires indépendantes $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ identiquement distribuées, de loi $\mathscr{U}([\![1;n]\!])$. On définit $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Soit $Z$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Montrer que $E(Z) = \sum_{k=1}^{n} P(Z>k)$.
2. Calculer $P(Y>k)$ puis $E(Y)$ et donner un équivalent simple de $E(Y)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

■

**Exercice 23.13** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0;1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note $u_n$ la probabilité que $S_n$ soit pair.

1. Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de $S_n$.
2. Calculer $u_1$ et $u_2$ pour trouver une relation de récurrence liant $u_n$ et $u_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

■

**Exercice 23.14** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n$ jetons numérotés de 1 à $n$, que l'on répartit dans $n$ boîtes numérotées de 1 à $n$ (chaque boîte contenant un et un seul jeton).

On définit, pour $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $X_k$ égale à 1 si la boîte numéro $k$ contient le jeton numéro $k$, et à 0 sinon. On note $S$ le nombre de boîtes contenant le jeton de même numéro.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la loi de $X_k$, son espérance et sa variance.
2. Calculer, pour tous $j \neq k$, la probabilité $P(X_j = 1, X_k = 1)$. En déduire l'espérance $E(X_jX_k)$. Les variables aléatoires $X_j$ et $X_k$ sont-elles indépendantes ?
3. a. Exprimer $S$ en fonction des $X_k$. En déduire l'espérance de $S$.
   b. Calculer la variance de $S$.

■

**Exercice 23.15 — (★).** Est-il possible de piper deux dés à six faces de sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme sur $[\![2;12]\!]$ ?

Autrement dit, peut-on trouver deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et $X + Y \hookrightarrow \mathscr{U}([\![2;12]\!])$ ?

■