Devoir surveillé n° 6

Samedi 25 février

Durée : 4 heures
La calculatrice est interdite.
On attachera une grande importance à la qualité de la rédaction.
Les résultats obtenus doivent être mis en évidence en les encadrant. Penser à laisser une marge, à laisser un espace en haut de la première page, à numéroter les pages, et tout ça **avant** *la fin de l'épreuve.*
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Dérivation

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x^3 \cos \dfrac{1}{x}$ peut être prolongée par continuité.
Étudier la dérivabilité de la fonction prolongée.

2. Calculer la dérivée n-ième de $g : x \mapsto (x^2 + x)e^x$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice trois (autrement dit, $u^3 = 0$ mais $u^2 \neq 0$). À tout réel t on associe l'endomorphisme $A(t) = \mathrm{Id}_E + tu + \dfrac{t^2}{2}u^2$.

1. Vérifier la relation $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, A(s+t) = A(s)A(t)$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, A(nt) = (A(t))^n$.

3. Montrer que pour tout réel t, l'endomorphisme $A(t)$ est un automorphisme. Quel est son inverse ?

4. Montrer que la famille (Id_E, u, u^2) est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

5. En déduire que l'application $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E), t \mapsto A(t)$ est injective.

Exercice 3 – Un espace de dimension $3n$

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $3n$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $2n$.

1. Déterminer la dimension de $\ker f$.

2. On note $g = f_{|\operatorname{Im} f}$ la restriction de g au sous espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.
Vérifier que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f^2$ et que $\ker g = \ker f \cap \operatorname{Im} f$.

3. En déduire que $\operatorname{rg} f^2 \geqslant n$.

On suppose désormais qu'on a $f^3 = 0$.

4. Comparer $\operatorname{Im} f^2$ et $\ker f$, et déterminer $\operatorname{rg} f^2$.

5. Soit S un supplémentaire de $\ker f^2$ dans E. Montrer que $\dim S = n$.

6. On suppose que $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de S.
Montrer que $(e_1,e_2,\dots,e_n, f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n), f^2(e_1),f^2(e_2),\dots,f^2(e_n))$ est une base de E.

Exercice 4 – Crochet de Lie et projecteurs

Dans cet exercice, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On définit sur $\mathcal{L}(E)$ une nouvelle loi, appelée *crochet de Lie*, par : $\forall f,g \in \mathcal{L}(E), [f,g] = f \circ g - g \circ f$.
Enfin, on note $\mathcal{P}_E$ est l'ensemble des projecteurs de E.

1. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[p,f] = \lambda p$, avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
Montrer que $p = 0$.

2. Soient $p \in \mathcal{P}_E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $[p,f] = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont stables par f.

3. Dans cette question, on se donne $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[f,g] = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

- ***a)*** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, [f^k,g] = \lambda k f^k$.
- ***b)*** Soit m un entier naturel quelconque. On suppose que $f^m \neq 0$.
  Montrer qu'alors $(\operatorname{Id}_E, f, f^2, \dots, f^m)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
  (On peut raisonner par récurrence, écrire une combinaison linéaire de la famille et appliquer le morphisme $u \mapsto [u,g]$)
- ***c)*** Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E)$? En déduire que f est nilpotent.

4. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $[p,q] = 0$.

- ***a)*** Montrer que $s = p \circ q$ et $r = p + q - p \circ q$ sont aussi des projecteurs de E.
- ***b)*** Montrer que $\ker s = \ker p + \ker q$ et $\operatorname{Im} s = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
- ***c)*** Montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
- ***d)*** On définit sur l'ensemble $\mathcal{P}_E$ la relation $\ll$ par : $\forall p,q \in \mathcal{P}_E, (\, p \ll q \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = p\,)$.
  Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}_E$.
- ***e)*** Montrer que le projecteur s est la borne inférieure de $\{p,q\}$ pour la relation $\ll$, et le projecteur r est la borne supérieure de $\{p,q\}$.

5. Dans cette question, on se donne $p, q \in \mathcal{P}_E$ tels que $[p,q] = \lambda p + \mu q$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On suppose aussi que $p \neq q$ et que λ ne vaut ni 0 ni 1.

- ***a)*** Montrer que $2\lambda q \circ p + \mu(1+\lambda)q = \lambda(1-\lambda)p$.
- ***b)*** En déduire que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$ puis que $q \circ p = p$.
- ***c)*** On suppose $p \neq 0$. Montrer que $\lambda = -1$, $\mu = 1$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.
- ***d)*** Réciproquement, montrer que si p,q sont deux projecteurs tels que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ alors on a l'égalité $[p,q] = q - p$.

6. Dans cette question, on se donne toujours $p, q \in \mathcal{P}_E$ tels que $[p,q] = \lambda p + \mu q$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et p et q distincts. On suppose cette fois que $p \neq 0$ et que λ ne vaut ni 0 ni -1.

- ***a)*** Montrer que $2\lambda p \circ q + \mu(1-\lambda)q = \lambda(1+\lambda)p$.
- ***b)*** Montrer successivement que $\ker q \subset \ker p$, $p \circ q = p$, $\lambda + \mu = 0$, $\lambda = 1$, $\ker p \subset \ker q$.
- ***c)*** Réciproquement, montrer que si p et q sont deux projecteurs tels que $\ker p = \ker q$ alors on a l'égalité $[p,q] = p - q$.

Exercice 5 – Familles positivement génératrices

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une famille $(e_1,e_2,\ldots,e_p)$ de vecteurs de E est *positivement génératrice* si elle vérifie $\forall x \in E, \exists \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{R}_+^*, x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p$.

1. Soit $\mathcal{F} = (e_1,e_2,\ldots,e_p)$ une famille de vecteurs de E. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{F}$ est positivement génératrice.
- $\mathcal{F}$ est génératrice et $\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}_+^*, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_p e_p = 0$.

Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{F} = (e_1,e_2,\ldots,e_p)$ est une famille positivement génératrice.

2. Montrer que $p \geqslant n+1$.

3. On suppose que $p \geqslant 2n+1$.

- ***a)*** Montrer qu'il existe $I \subset [\![1;p]\!]$ de cardinal n tel que la sous-famille $(e_i)_{i\in I}$ soit une base.
- ***b)*** On pose $J = [\![1;p]\!] \setminus I$. Montrer que $(e_j)_{j\in J}$ est liée.
- ***c)*** Montrer qu'il existe $K \subsetneq J$ telle que $(e_i)_{i\in I\cup K}$ soit positivement génératrice.

4. En déduire le résultat : de toute famille positivement génératrice on peut extraire une famille positivement génératrice qui a au plus $2n$ vecteurs.

5. Donner un exemple de famille positivement génératrice à $2n$ vecteurs, dont aucune sous-famille stricte n'est positivement génératrice.